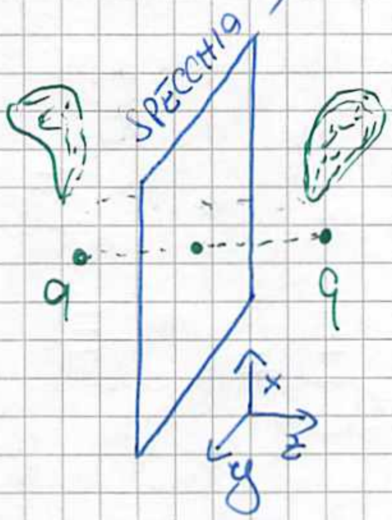
SIMMETRIE A SPECCHIO

LA DISTRIBUZIONE DI CARICA
È LA SORGENTE DEL CAMPO ELETTRICO

LE SIMMETRIE DI $\rho(\vec{r})$
SONO LE SIMMETRIE DI $\vec{E}(\vec{r})$

ESEMPIO PIANO DI SIMMETRIA A SPECCHIO

PIANO DI SIMMETRIA IN $z=0$



$\rho(\vec{r})$ SIMMETRICA RISPETTO A PIANO $z=0$

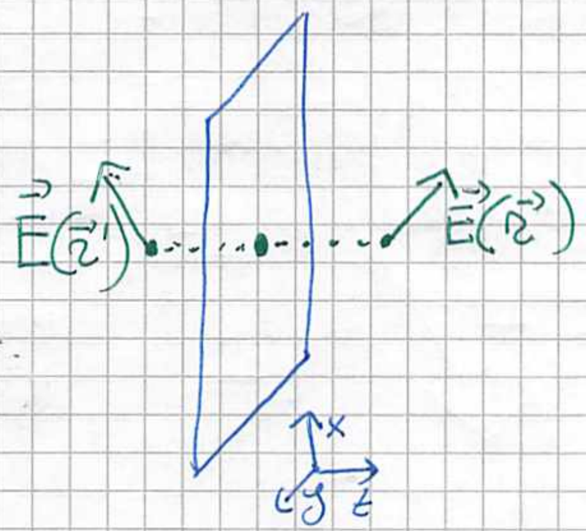
$$\Updownarrow$$

$$\rho(x,y,z)=\rho(x,y,-z)$$

CAMPO ELETTRICO STESSA SIMMETRIA

MA CARICA QUANTITÀ SCALARE E CAMPO $\vec{E}$ QUANTITÀ VETTORIALE

COME SI SPECCHIA UN VETTORE?



$$\begin{cases} \vec{r} = (x, y, z) \\ \vec{r}\,' = (x, y, -z) \\ \vec{E}(\vec{r}) = (e_x, e_y, e_z) \\ \vec{E}(\vec{r}\,') = (e_x, e_y, -e_z) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} E_x(x,y,z) = E_x(x,y,-z) \\ E_y(x,y,z) = E_y(x,y,-z) \\ E_z(x,y,z) = -E_z(x,y,-z) \end{cases}}$$

LEMMA

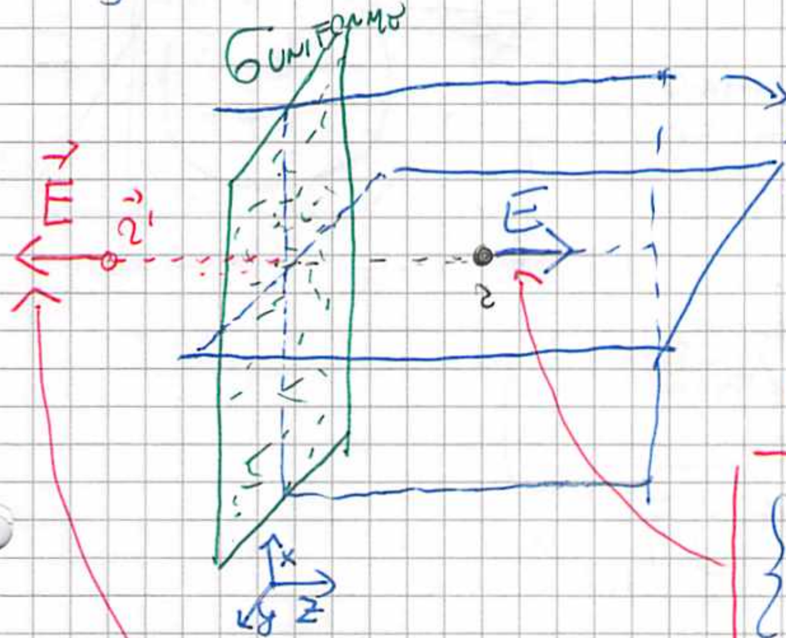
SE $\vec{r} \in$ PIANO DI SIMMETRIA $z=0$

$$E_z(x,y,0) = -E_z(x,y,0) \iff E_z(x,y,0) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{SE } \vec{r} \in \text{PIANO DI SIMMETRIA DI } \rho(\vec{r}) \\ \vec{E}(\vec{r}) \parallel \text{PIANO DI SIMMETRIA} \end{array}}$$

ESEMPI

1) DISTRIBUZIONE PIANA UNIFORME σ



PIANI PERPENDICOLARI AL PIANO DI CARICA SONO PIANI DI SIMMETRIA

$\vec{E}(\vec{r})$ // AI PIANI PASSANTI PER $(\vec{r})$

$\Downarrow$

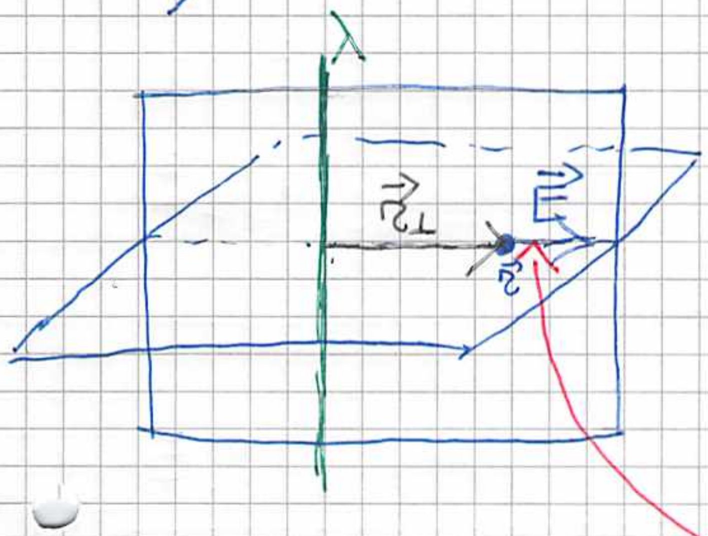
$$\boxed{\begin{cases} E_x(\vec{r}) = 0 \\ E_y(\vec{r}) = 0 \end{cases}}$$

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) \perp \text{AL PIANO DI CARICA } \sigma}$

PIANO $z=0$ PIANO DI SIMMETRIA

$$\boxed{E_z(x,y,z) = -E_z(x,y,-z)}$$

2) DISTRIBUZIONE LINEARE RETTILINEA UNIFORME λ



2 PIANI DI SIMMETRIA PASSANTI PER $\vec{r}$

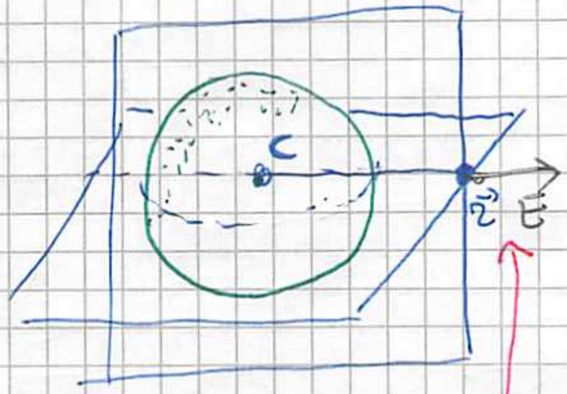
- PIANO CONTENENTE IL FILO
- PIANO PERPENDICOLARE AL FILO

$\vec{E}(\vec{r})$ // AI DUE PIANI

$\vec{E}(\vec{r})$ RADIALE

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r}) \frac{\vec{r}_\perp}{|r_\perp|}}$$

3) DISTRIBUZIONE SFERICA



$$\rho(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)$$

PIANI PASSANTI PER IL CENTRO DELLA DISTRIBUZIONE C E PER IL PUNTO $\vec{r}$ SONO DI SIMMETRIA

$$\Downarrow$$

$\vec{E}(\vec{r})$ = RADIALE

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}$$

3ª LE

SIMMETRIE DI TRASLAZIONE

ES. NELLA DIREZIONE z $(\parallel z)$

$\equiv$

$\rho(\vec{r}) = \rho(x,y)$ (ρ NON DIPENDE DA z)

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(x,y) \quad (\vec{E} \text{ NON DIPENDE DA } z)}$$

ESEMPI

1) PIANO DI CARICA UNIFORME σ

SIMMETRIA TRASLAZIONE $\parallel$ X E y

$E_z(x,y,z) = E_z(z)$ [E_x, E_y = 0 PER SPECCHIO]

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \hat{z} f(|z|) \frac{z}{|z|}}$$

2) DISTRIBUZIONE LINEARE UNIFORME

SIMMETRIA TRASLAZIONALE $\parallel$ FILO $\parallel z$

$$\vec{E}(\vec{r}) = f(r_\perp, \varphi) \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}$$

SIMMETRIA DI ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE

SE ASSE DI ROTAZIONE $\hat{z} \Leftrightarrow$ DISTRIBUZIONE INDIPENDENTE DA φ (SIA IN COORDINATE CILINDRICHE CHE SFERICHE)

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r_\perp, z) \quad \text{o} \quad \rho(\vec{r}) = \rho(r, \theta)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|\vec{E}(\vec{r})| = f(r_\perp, z) \quad \text{o} \quad |\vec{E}(\vec{r})| = f(r, \theta)}$$

(IN REALTÀ SIMMETRIA DI ROTAZIONE PIÙ POTENTE SE CONSIDERO IL VETTORE, MA PER GLI ESEMPI SEGUENTI BASTA IL MODULO)

ESEMPI

2) DISTRIBUZIONE RETTILINEA UNIFORME λ

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = f(r_\perp) \frac{\vec{r}_\perp}{|r|}}$$

2) DISTRIBUZIONE SFERICA

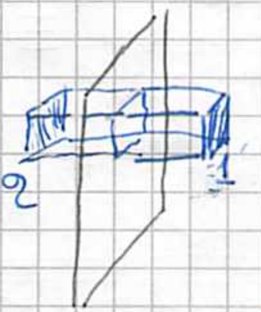
QUALSIASI ASSE PASSANTE PER IL CENTRO DI SIMMETRIA SFERICA È ASSE DI SIMMETRIA ROTAZIONALE

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}$$

APPLICAZIONE DI SIMMETRIE + TEOREMA DI GAUSS PER DETERMINARE IL CAMPO ELETTRICO

1) PIANO UNIFORME DI CARICA σ

SIMMETRIE $\vec{E}(\vec{r}) = f(|z|)\frac{z}{|z|}\hat{z}$



FLUSSO ATTRAVERSO SUPERFICIE PARALLELEPIPEDO CON FACCE 1, 2 // AL PIANO E IN $+z$ e $-z$

- $E_{//}\hat{z} \Rightarrow$ FLUSSO FACCE LATERALI $= 0$
- FLUSSO FACCIA 1 $\underset{\text{AREA FACCIA}}{A}\cdot f(|z|)$
- FLUSSO FACCIA 2 $A\cdot f(|z|)$

$$\Phi_S(E) = 2A f(|z|)$$

CARICA CONTENUTA NEL PARALLELEPIPEDO $= \sigma A$

$\Downarrow$ TEOREMA DI GAUSS

$$2A f(|z|) = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow f(|z|) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\hat{z}}$$

NOTARE CHE
INVARIANZA DEL CAMPO DA z NON È UNA CONSEGUENZA DI UNA SIMMETRIA!

2) DISTRIBUZIONE RETTILINEA UNIFORME λ

SIMMETRIE $\vec{E}(\vec{r}) = f(r_\perp) \cdot \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}$

FLUSSO SUPERFICIE CILINDRO COASSIALE A FILO

FACCIA SUPERIORE/INFERIORE $\vec{E} \perp \hat{n} \Rightarrow \Phi_{SUP}(\vec{E}) = 0$

FACCIA LATERALE $\vec{E} \parallel \hat{n}$

$$\Phi_{LATERALE}(\vec{E}) = 2\pi r_\perp h \, f(r_\perp)$$

CARICA NEL CILINDRO $= \lambda \cdot h$

GAUSS $2\pi r_\perp h \, f(r_\perp) = \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0}$

$$\Downarrow$$

$$f(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r_\perp}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi \varepsilon_0} \frac{\lambda}{r_\perp} \frac{\vec{r}_\perp}{r_\perp}}$$

3) DISTRIBUZIONE SFERICA DI CARICA CENTRATA IN $\vec{r}_c$

$$\rho(\vec{r}) = \rho(|\vec{r} - \vec{r}_c|)$$

SIMMETRIE $\quad \vec{E}(\vec{r}) = f(|\vec{r} - \vec{r}_c|) \dfrac{\vec{r} - \vec{r}_c}{|\vec{r} - \vec{r}_c|}$

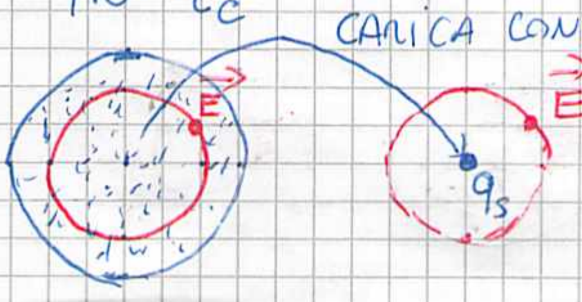
S = SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO r_S CENTRATA IN r_c

$$\vec{E} \parallel \hat{n} \Rightarrow \Phi_S(\vec{E}) = 4\pi r_S^2 f(r_S) = \frac{\overbrace{q(r_S)}^{\text{CARICA CONTENUTA IN } S}}{\varepsilon_0}$$

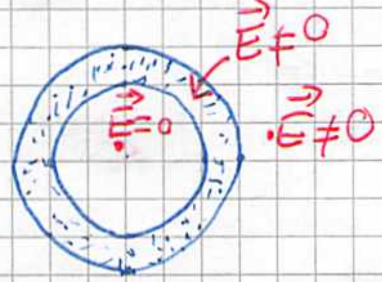
$$q(r_S) = \int_{r \leq r_S} d^3r \, \rho(|\vec{r}|)$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overbrace{q(|\vec{r} - r_c|)}^{\text{CARICA CONTENUTA IN SFERA DI RAGGIO } |\vec{r} - \vec{r}_c|}}{|\vec{r} - r_c|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_c}{|r - r_c|}}$$

- IL CAMPO È LO STESSO DI QUELLO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME $q(|\vec{r} - \vec{r}_c|)$ CONCENTRATA IN r_c



- IL CAMPO ELETTRICO DENTRO UNA BUCCIA DI CARICA SFERICA È NULLO



4a LEZ.

- CASO PARTICOLARE → DISTRIBUZIONE SFERICA UNIFORME DI RAGGIO r_M E DENSITÀ D

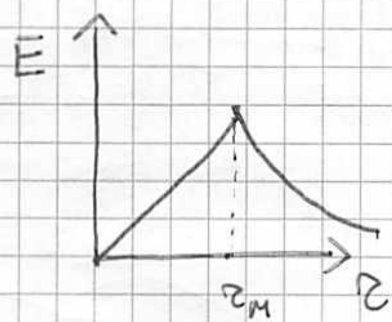
$\rho(r) = D \quad r < r_M$

$\rho(r) = 0 \quad r > r_M$

$$q(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{r} r'^2 dr' \rho(r')$$

SE $r < r_M \quad q(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 D \; ; \; E(r) = \frac{1}{3\varepsilon_0} D r$

$r > r_M \quad q(r) = \frac{4\pi}{3} r_M^3 D \; ; \; E(r) = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{D r_M^3}{r^2}$



SE LA SFERA È CENTRATA IN $\vec{r}_c$

SE $|\vec{r}-\vec{r}_c| < r_M$

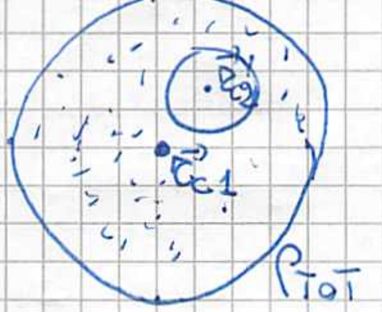
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{3\varepsilon_0} D(\vec{r}-\vec{r}_c)$$

$|\vec{r}-\vec{r}_c| > r_M$

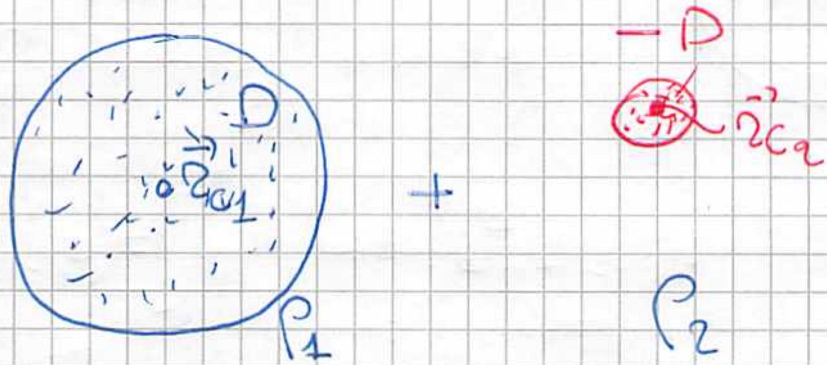
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{D r_M^3}{|\vec{r}-\vec{r}_c|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}_c}{|\vec{r}-\vec{r}_c|}$$

DISTRIBUZIONE UNIFORME DI CARICA, D, UN BUCO SFERICO SCENTRATO

CAMPO ELETTRICO NEL BUCO?



$\|$

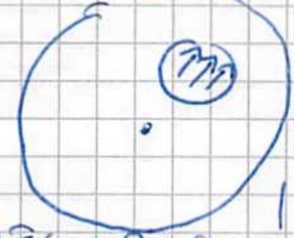


$$\vec{E}_{\rho_{TOT}}(\vec{r}) = \vec{E}_{\rho_1}(\vec{r}) + \vec{E}_{\rho_2}(\vec{r})$$

NEL BUCO

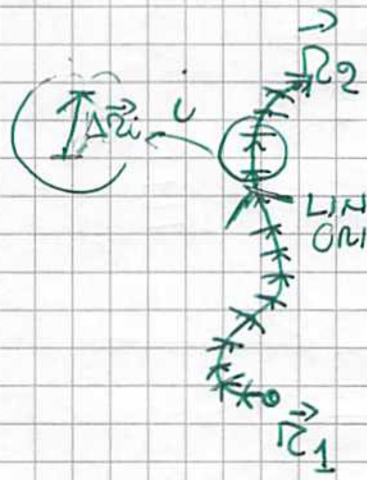
$$= \frac{1}{3\varepsilon_0} D(\vec{r}-\vec{r}_{c1}) + \frac{1}{3\varepsilon_0}(-D)(\vec{r}-\vec{r}_{c2})$$

$$= \frac{1}{3\varepsilon_0} D(\vec{r}_{c2}-\vec{r}_{c1}) =$$



CAMPO UNIFORME NEL BUCO!

INTEGRALE DI LINEA DI UN CAMPO VETTORIALE



$\vec{C}(\vec{r})$ = CAMPO VETTORIALE

$$I_{\mathcal{L}_{1\to 2}}(\vec{C}) = \int_{\mathcal{L}_{1\to 2}} d\vec{r} \cdot \vec{C}(\vec{r}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{r}_i \cdot \vec{C}(\vec{r}_i)$$

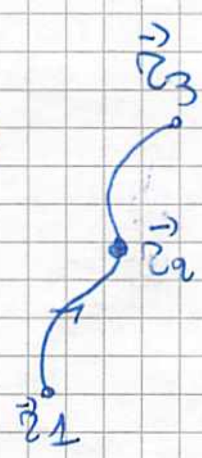
PRODOTTO SCALARE

- SE HO UNA LEGGE PARAMETRICA TALE CHE:

$\vec{r}(s)$ PERCORRE $\mathcal{L}_{1\to 2}$ PER $s_1 < s < s_2$

$$I_{\mathcal{L}_{1\to 2}}(\vec{C}) = \int_{s_1}^{s_2} ds \, \underbrace{\frac{d\vec{r}(s)}{ds} \cdot \vec{C}(\vec{r}(s))}_{\text{INTEGRALE UNIDIMENSIONALE STANDARD}}$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} ds \left[\frac{dr_x}{ds} C_x(\vec{r}(s)) + \frac{dr_y}{ds} C_y(\vec{r}(s)) + \frac{dr_z}{ds} C_z(\vec{r}(s)) \right]$$



- $$I_{\mathcal{L}_{1\to3}}(\vec{C}) = I_{\mathcal{L}_{1\to2}}(\vec{C}) + I_{\mathcal{L}_{2\to3}}(\vec{C})$$

- $$I_{\mathcal{L}_{1\to2}}(\vec{C}_1+\vec{C}_2) = I_{\mathcal{L}_{1\to2}}(\vec{C}_1) + I_{\mathcal{L}_{1\to2}}(\vec{C}_2)$$

LAVORO DI UNA FORZA PER SPOSTARE UN CORPO DA $\vec{r}_1$ A $\vec{r}_2$

LAVORO = FORZA x SPOSTAMENTO = ENERGIA SPESA DALLA FORZA ($\vec{F}$) PER SPOSTARE IL CORPO

$$\boxed{L = I_{\mathcal{L}_{1\to 2}}(\vec{F})}$$

CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO

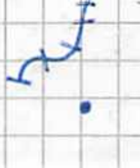
- SE $I_{\mathcal{L}_{1\to 2}}(\vec{C})$ DIPENDE SOLO DA $\vec{r}_1$ E $\vec{r}_2$ E NON DAL CAMMINO PARTICOLARE COMPIUTO IL CAMPO $\vec{F}(\vec{r})$ È CONSERVATIVO ALTRIMENTI È NON CONSERVATIVO

[ESEMPIO FISICA I: PER LE FORZE CONSERVATIVE POSSO DEFINIRE UN ENERGIA POTENZIALE]

FORZE CENTRALI SONO CONSERVATIVE

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \equiv \text{FORZA CENTRALE}$$

$$I_{\mathcal{L}_{1\to 2}}(\vec{F}) = \sum_i \Delta\vec{r}_i \cdot \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|}\, f(|\vec{r}_i|) = \sum_i \left(\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i\right)\frac{\vec{r}_i}{r_i}\, f(|\vec{r}_i|)$$



$$= \sum_i \left(\vec{r}_{i+1} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i}{r_i}\right) f(|\vec{r}_i|) =$$

SE $|\Delta \vec{r}_i| << r_i$

$$\simeq \sum_i \left(\vec{r}_{i+1} \cdot \frac{\vec{r}_{i+1}}{r_{i+1}} - r_i \right) f(r_i) = \sum (r_{i+1} - \vec{r}_i) f(r_i) =$$

$$= \underbrace{\int_{r_1}^{r_2}}_{\text{INTEGRALE}} dr\, f(r) = \mathcal{F}(r_2) - \mathcal{F}(r_1)$$

INTEGRALE SEMPLICE UNIDIMENSIONALE

$\mathcal{F}(r)$ PRIMITIVA DI $f(r)$

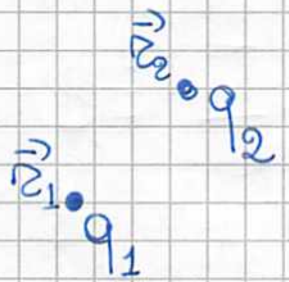
OVVERO

$$\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr} = f(r)$$

ENERGIA PER FORMARE UNA DISTRIBUZIONE DI CARICHE LOCALIZZATE (LAVORO CONTRO FORZE ELETTROSTATICHE)

(DEF: ZERO DELL'ENERGIA $\Leftrightarrow$ CARICHE PUNTUALI SEPARATE FRA LORO ALL'INFINITO)

- 2 CARICHE PUNTUALI



- q_1 PIAZZATA IN $\vec{r}_1$ (NON SERVE LAVORO)
- LAVORO PER PORTARE DA INFINITO q_2 IN $\vec{r}_2$ CONTRO LA FORZA COULOMBIANA

PRODOTTO SCALARE

$$E = \int_{\mathcal{L}_{\vec{\infty} \to \vec{r}_2}} d\vec{r} \cdot \left[- \vec{F}_2(\vec{r}) \right] =$$

CONTRO LA FORZA

INDIPENDENTE DAL PERCORSO VISTO CHE $\vec{F}_2(\vec{r})$ CENTRALE

$$\vec{F}_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = f(|\vec{r} - \vec{r}_1|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

FORZA CENTRALE

PRIMITIVA DI $f(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ È $\mathcal{F}(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$

PER RELAZIONE GENERALE FORZE CENTRALI

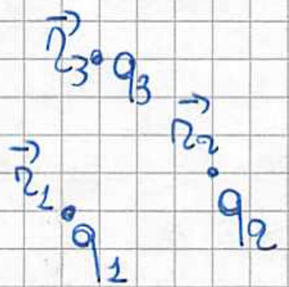
CONTRO LA FORZA

$$E = -\left[\mathcal{F}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) - \mathcal{F}(|\vec{\infty} - \vec{r}_1|)\right]$$

$$\mathcal{F}(\infty) = 0$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}}$$

ENERGIA PER PIAZZARE TRE CARICHE



E = LAVORO PER PIAZZARE q_1 E q_2 (IN ASSENZA DI q_3)

+ LAVORO PER PIAZZARE q_3 (IN PRESENZA DI (q_1, q_2)

PRODOTTO SCALARE

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \int_{\mathcal{L}_{\vec{\infty} \to \vec{r}_3}} d\vec{r} \cdot \left[-\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_3}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2 q_3}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}\right)\right]$$

STESSI INTEGRALI

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

- ENERGIA PER PIAZZARE N CARICHE $\stackrel{def}{\equiv}$ ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA $= U$

$$\boxed{U = \underbrace{\sum_{\langle ij \rangle}}_{\text{COPPIE}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}$$

$U =$ QUANTITÀ SCALARE

5ª LEZIONE

FORZA A PARTIRE DALL'ENERGIA POTENZIALE

$\overrightarrow{\text{FORZA}}$ SU $q_k = \vec{F}_k = ?$

$$\text{GRADIENTE}_{\vec{r}} \left[\overbrace{f(\vec{r})}^{\text{CAMPO SCALARE DI } \vec{r}} \right] = \text{CAMPO VETTORIALE DI } \vec{r} =$$

VARIABILE VETTORIALE RISPETTO ALLA QUALE IN GRADIENTE È CALCOLATO

$$\stackrel{def}{\equiv} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} f(\vec{r}) \stackrel{def}{\equiv} \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r}) + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{r}) + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{r})$$

$$\vec{F}_k = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_k} U = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_k} \left[\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{q_k q_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \right.$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_k} \sum_{i\neq k} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_k q_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} = \sum_{i\neq k} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_k q_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|}$$

= FORZA DI COULOMB

(NOTARE CHE $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} f(|\vec{r} - \vec{r}_0|) = f'(|\vec{r} - r_0|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$

$$f'(a) = \frac{d f(a)}{da}$$

INFATTI $\frac{\partial}{\partial x} f(|\vec{r} - \vec{r}_0|) = f'(|\vec{r} - r_0|) \frac{\partial |\vec{r} - \vec{r}_0|}{\partial x} =$

$$\frac{d |\vec{r} - \vec{r}_0|}{dx} = \frac{d\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}{dx}$$

$$= \frac{(x - x_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

)

ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA PER DISTRIBUZIONI VOLUMETRICHE DI CARICA

$\lim q_i \to 0 \quad N \to \infty \Rightarrow \rho(\vec{r})$

SOMMATORIE RIMPIAZZATE DA INTEGRALI

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int d^3r \int d^3r' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

CIRCOLAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO

PRODOTTO SCALARE

$$\int_{\mathcal{L}_{1\to 1}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) \equiv \oint_{\mathcal{L}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) =$$ CIRCOLAZIONE (INTEGRALE DI LINEA SU UN CAMMINO CHIUSO)

CAMMINO CHIUSO

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

STESSO INTEGRALE DI QUELLO FATTO PER LA FORZA DI COULOMB

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 0}$$

IL RISULTATO NON DIPENDE DAL PERCORSO SE IL PUNTO FINALE E INIZIALE È LO STESSO

$1 = 1$

FORMA INTEGRALE DELL'ELETTROSTATICA

LEGGE DI COULOMB

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \, \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

TEOREMA DI GAUSS

$$\Phi_{S_{CHIUSA}}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_{\text{CONTENUTO IN } S}} d^3r \, \rho(\vec{r})$$

CIRCOLAZIONE DI $\vec{E}$

$$\oint_{\mathcal{L}_{CHIUSO}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \, \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \underbrace{\vec{E}_\infty}_{\substack{\text{COSTANTE ADDITIVA} \\ \text{CAMPO UNIFORME}}}$$

- SE $\rho(\vec{r})$ LOCALIZZATA $\lim_{\vec{r}\to\vec{\infty}} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_\infty$

- $\vec{E}_\infty$ UNIFORME : $\Phi_{S_{CHIUSA}}(\vec{E}_\infty) = 0 \qquad \oint_{\mathcal{L}_{CHIUSA}} d\vec{r}\cdot\vec{E}_\infty = 0$

DIVERGE)

PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ DEL CAMPO ELETTRICO

- DENSITÀ DI CARICA DI VOLUME $\rho(\vec{r})$ [FINITA IN TUTTI I PUNTI]

$$\Downarrow$$

$\vec{E}(\vec{r})$ CONTINUO IN TUTTO LO SPAZIO

- CARICHE PUNTUALI

$\vec{E}(\vec{r})$ NON È CONTINUO, IN PROSSIMITÀ DELLE CARICHE DIVERGE COME $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$

- DISTRIBUZIONI LINEARI $\lambda(\vec{r})$

IL CAMPO NON È CONTINUO, DIVERGE COME

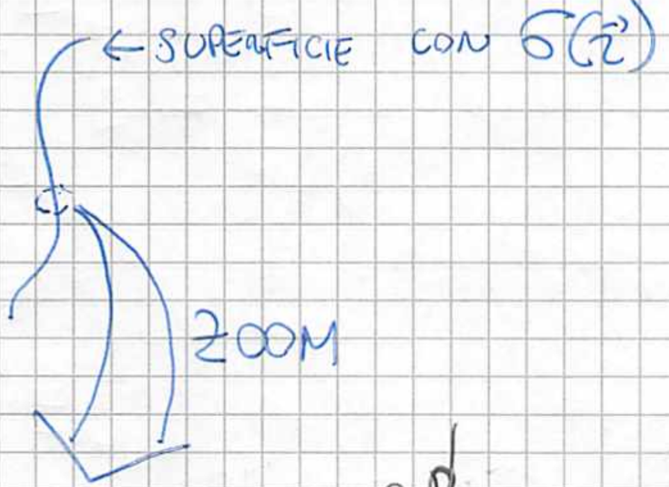
$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_\perp} \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}$$

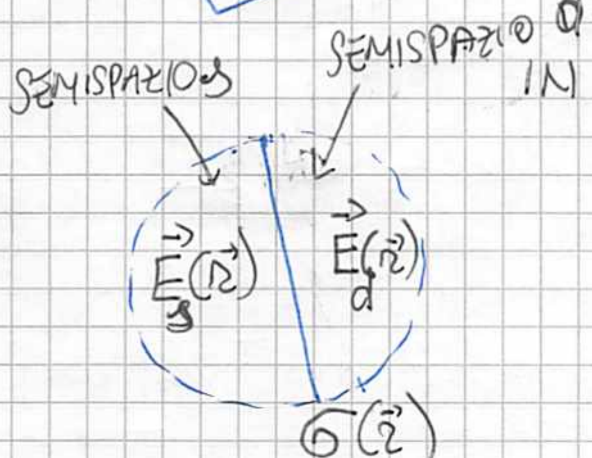
- DISTRIBUZIONE DI SUPERFICIE $\sigma(\vec{r})$

IL CAMPO È DISCONTINUO MA FINITO (NON DIVERGE)

DISCONTINUITÀ DEL CAMPO ELETTRICO IN PRESENZA DI UNA DISTRIBUZIONE SUPERFICIALE $\sigma(\vec{r})$

→ CASO IMPORTANTE PERCHÈ $\sigma(\vec{r})$ SI PRODUCONO SULLE INTERFACCE FRA MATERIALI (METALLI DIELETTRICI)





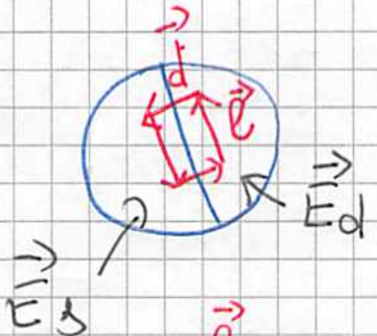
IN SEGUITO A ZOOM

- SUPERFICIE PIANA
- $\sigma(\vec{r})$ COSTANTE NELLA REGIONE ZOOM
- $\vec{E}_d(\vec{r})$ E $\vec{E}_s(\vec{r})$ COSTANTI

NEI RISPETTIVI SEMISPAZI MA $\vec{E}_s(\vec{r}) \neq \vec{E}_d(\vec{r})$

$$\vec{E}_d(\vec{r}) - \vec{E}_s(\vec{r}) = ?$$

USO LE DUE EQUAZIONI INTEGRALI



1) $\oint d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$

RETTANGOLO

$\vec{\ell}$ // A SUP.

$\vec{d} \perp$ A SUP

$$\vec{\ell} \cdot \vec{E}_d + \frac{\vec{d}}{2} \cdot \vec{E}_d + \frac{\vec{d}}{2} \cdot \vec{E}_s - \vec{\ell} \cdot \vec{E}_s - \frac{\vec{d}}{2} \cdot \vec{E}_s - \frac{\vec{d}}{2} \cdot \vec{E}_d = 0$$

$$\Big\downarrow \ |\vec{d}| \to 0$$

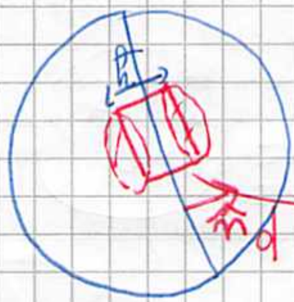
$$\vec{\ell} \cdot \left(\vec{E}_d - \vec{E}_s\right) = 0 \qquad \forall\, \vec{\ell} \parallel \text{A SUP.}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{E}_{d\parallel}(\vec{r}) = \vec{E}_{s\parallel}(\vec{r})}$$

LA COMPONENTE PARALLELA ALLA SUPERFICIE È CONTINUA

2) $\Phi_S(\vec{E}) = \frac{\text{CARICA INS}}{\varepsilon_0}$



S CILINDRO CON DI ALTEZZA h
ASSE ⊥ ALLA E BASE A SUPERFICIE

$\hat{n}_d$ = NORMALE ALLA SUPERFICIE USCENTE VERSO SEMISPAZIO d

$\hat{n}_s = -\hat{n}_d$

PER $h \to 0$

$$A\,\hat{n}_d \cdot \vec{E}_d + A\,\hat{n}_s \vec{E}_d = \frac{A\sigma}{\varepsilon_0}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\hat{n}_d(\vec{r}) \cdot \left(\vec{E}_d(\vec{r}) - \vec{E}_s(\vec{r})\right) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

- COMPONENTE PARALLELA DISCONTINUA
- DISCONTINUITÀ $= \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

6ª lezione

POTENZIALE ELETTRICO $V(\vec{r})$

$V(\vec{r})$ CAMPO SCALARE

VARIAZIONE DI POTENZIALE

$$\Delta V = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) \overset{def}{=} \int_{\mathcal{L}_{1\to 2}} d\vec{r} \cdot \left(-\vec{E}(\vec{r})\right)$$

INDIPENDENTE DAL CAMMINO $\left[\oint_{\mathcal{L}} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0\right]$

- $\Delta V \cdot q$ LAVORO PER PORTARE LA CARICA DA $1 \to 2$ CONTRO LA FORZA ELETTROSTATICA

- UNITÀ IN MKS [VOLT] = [JOULE/COULOMB]

- $V(\vec{r})$ LINEARE IN $\vec{E}(\vec{r})$, CHE È A SUA VOLTA LINEARE IN $\rho(\vec{r})$

POTENZIALE DISTRIBUZIONE DI CARICA LOCALIZZATA

- PER CONVENZIONE $V(+\infty)=0$

- 1 CARICA PUNTUALE

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{V(\infty)}} = \int_{\mathcal{L}_{\infty\to\vec{r}}} d\vec{r}\,' \cdot \underbrace{\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}\,'-\vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}\,'-\vec{r}_1}{|\vec{r}\,'-\vec{r}_1|} \right]}_{-\vec{E}(\vec{r}\,')}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

- N-CARICHE $V(\vec{r})$ LINEARE NELLA CARICA

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

- DISTRIBUZIONE DI CARICA

$$V(\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$\vec{E}(\vec{r})$ A PARTIRE DA $V(\vec{r})$

$\vec{E}(\vec{r}) =$ COSTANTE FRA $\vec{r}$ E $\vec{r}+d\vec{r}$

$$V(\vec{r}+d\vec{r}) - V(\vec{r}) = -\int_{\mathcal{L}_{\vec{r}\to\vec{r}+d\vec{r}}} d\vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') = -d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \vec{r}} V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})}$$

LEGGE DI COULOMB

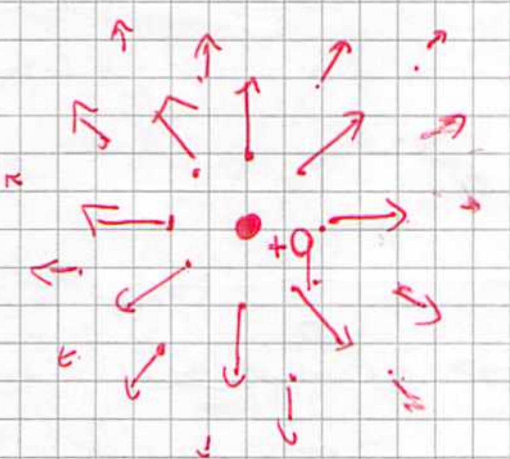
$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} V(\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} V(\vec{r}) \end{cases}$$

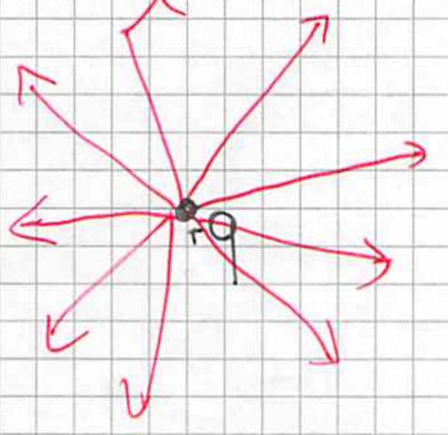
VISUALIZZAZIONE CAMPO ELETTRICO

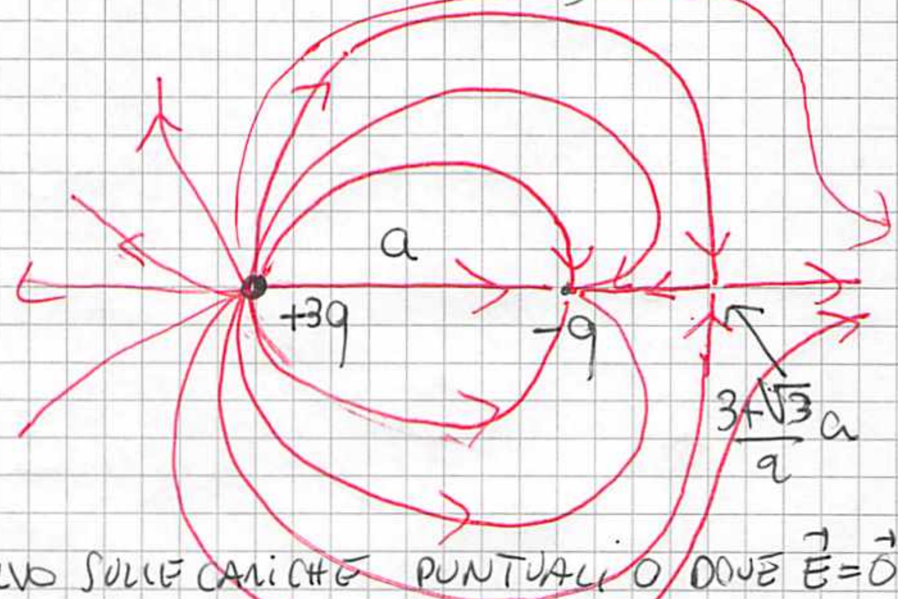
1) VISUALIZZAZIONE CON FRECCE DI LUNGHEZZA PROPORZIONALE (O MONOTONA) CON IL MODULO DI $|\vec{E}(\vec{r})|$



ESEMPIO CARICA PUNTUALE

2) CON LE LINEE DI FORZA: CURVE LA CUI TANGENTE EST PARALLELA A $\vec{E}(\vec{r})$





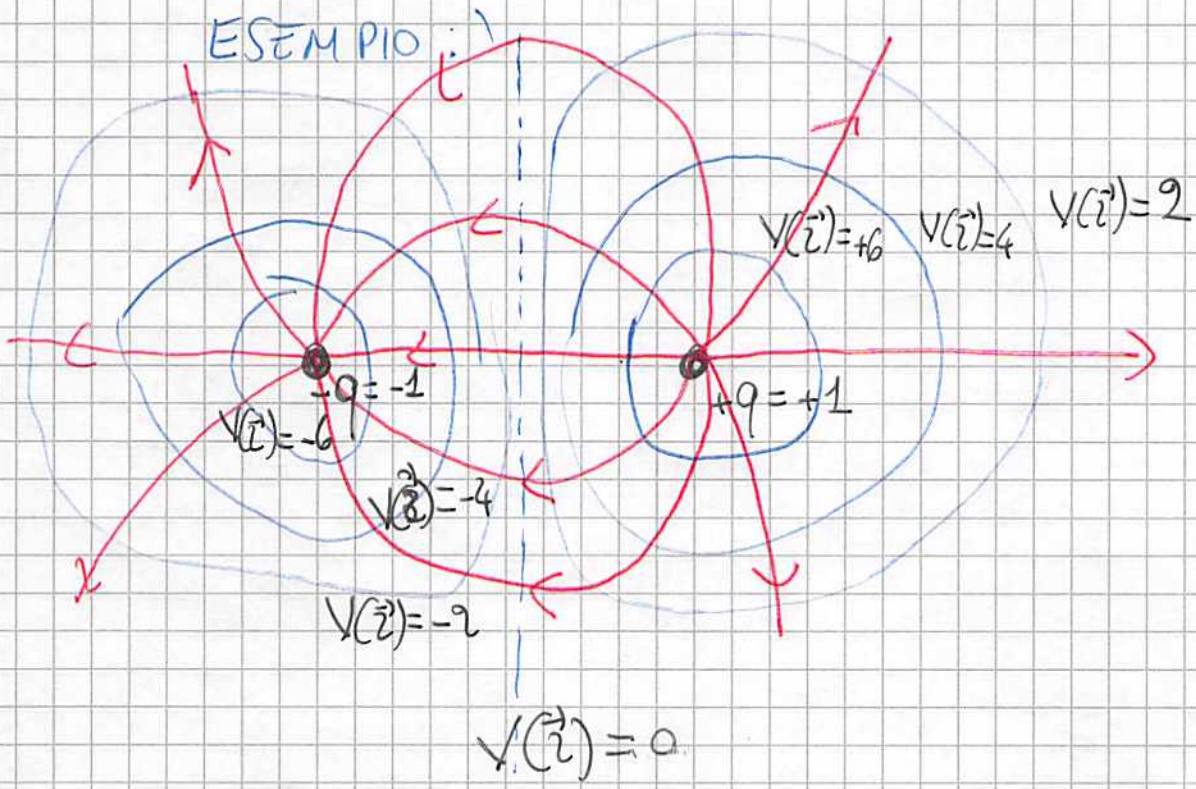
- LINEE CONTINUE SALVO SULLE CARICHE PUNTUALI O DOVE $\vec{E}=\vec{0}$
- SI ADDENSANO O (RAREFANNO) DOVE IL CAMPO È PIU INTENSO O (MENO INTENSO)

VISUALIZZARE IL POTENZIALE

CON DELLE LINEE EQUIPOTENZIALE

$V(\vec{r}) = C_i$ $\quad$ C_i = COSTANTI [EQUIDISTANTI]

ESEMPIO:



$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} V(\vec{r}) \perp$ ISOSUPERFICIE $\Rightarrow$ $\vec{E} \perp$ A ISOSUP.

$\Downarrow$

LIGNE DI FORZA
$\perp$ A ISOSUP.

ENERGIA PER FORMARE UNA DISTRIBUZIONE $\rho(\vec{r})$ (BIS)

$$U = \frac{1}{2}\int d^3r \underbrace{\int d^3r' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r})\,\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{V(\vec{r}\,')} \qquad (1)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})} \qquad (2)$$

SE SISTEMA ALTA SIMMETRIA MOLTO PIU FACILE USARE (2) CHE (1)

INFATTI GAUSS + SIMMETRIA $\rightarrow \vec{E}(\vec{r}\,') \rightarrow V(\vec{r}\,') \rightarrow U = \frac{1}{2}\int d^3r\, V(\vec{r}\,')\rho(\vec{r})$