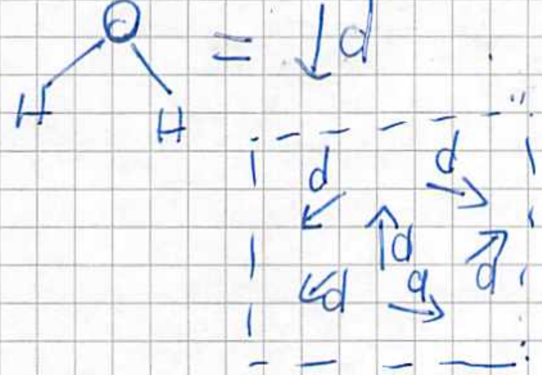
CAMPO ELETTRICO NEGLI ISOLANTI (DIELETTRICI)

- NEGLI ISOLANTI LE CARICHE NON SI POSSONO SPOSTARE A DISTANZE ARBITRARIAMENTE GRANDI COME NEI METALLI MA SOLO SU DISTANZE COMPARABILI AL LEGAME CHIMICO ~1-10 Å

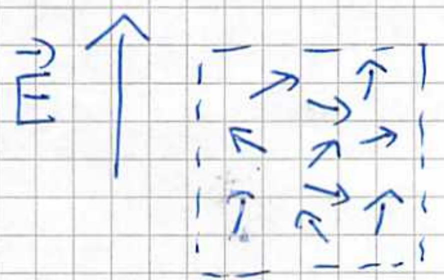
ESEMPIO: ACQUA



IN ASSENZA DI CAMPO ELETTRICO DIPOLI ORIENTATI CASUALMENTE

DIPOLO MEDIO PER UNITÀ DI VOLUME = 0

IN PRESENZA DI UN CAMPO ELETTRICO

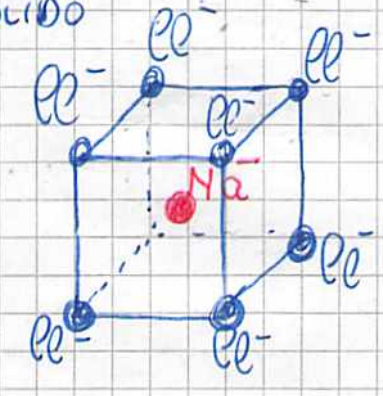


DIPOLI MAGGIORMENTE ORIENTATI NELLA DIREZIONE DEL CAMP

DIPOLO MEDIO PER UNITÀ DI VOLUME $\neq \vec{0} = a\vec{E}$

$a > 0$

ESEMPIO SOLIDO ISOLANTE

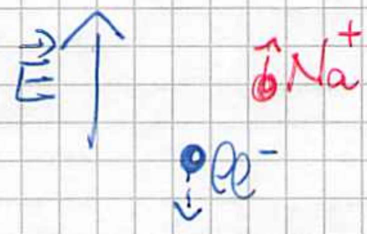


SALE DA CUCINA

Na^+Cl^-

IN ASSENZA DI CAMPO ELETTRICO
DIPOLO PER UNITÀ DI VOLUME $= 0$

IN PRESENZA DI CAMPO ELETTRICO



GLI IONI + SI SPOSTANO NELLA DIREZIONE DI $\vec{E}$

GLI IONI − SI SPOSTANO NELLA DIREZIONE DI $-\vec{E}$

$\Downarrow$

DIPOLO PER UNITÀ DI VOLUME $\neq 0$

$\propto a\vec{E}$

$a > 0$

LEZ 15,5

POLARIZZAZIONE ELETTRICA

$$\vec{P}(\vec{r}) \overset{def}{\equiv} \text{POLARIZZAZIONE} = \lim_{V \to 0} \frac{\sum_i \vec{d}_i}{V}$$

$\vec{d}_i$ → DIPOLI IN V

V → VOLUME INTORNO A $\vec{r}$

$\vec{P}(\vec{r})$: CAMPO VETTORIALE

$\neq \vec{0}$ SE $\vec{r} \in$ ISOLANTE

CARICA DI POLARIZZAZIONE

- CALCOLATA A PARTIRE DAI SUOI EFFETTI SUL POTENZIALE

$$V_{POL}(\vec{r}) = \int \underbrace{d^3 r' \, \vec{P}(\vec{r}\,')}_{\text{DIPOLO TOTALE IN UN VOLUMETTO } d^3r' \text{ IN } \vec{r}\,'} \frac{\cdot(\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \qquad (1)$$

IDENTITÀ MATEMATICHE:

$$\underbrace{\vec{\nabla}'}_{\text{gradiente rispetto a } \vec{r}\,'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}\,'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$\underbrace{\vec{\nabla}' \cdot}_{\text{DIVERGENZA RISPETTO A } \vec{r}\,'} \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}\,') \right] + \vec{P}(\vec{r}) \cdot \left[\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right]$$

$$\boxed{\vec{P}(\vec{r}) \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\frac{[\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}\,')]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]}$$

SE RIMPIAZZIAMO QUESTA IDENTITÀ NELL'EQUAZIONE (1)

$$V_{POL}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r \frac{[-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}\,')]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r\, \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]}$$

TEOREMA DIVERGENZA $= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S d^2\vec{a}\,' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 0$

S SUPERFICIE DI TUTTO LO SPAZIO : $|\vec{r}\,'| = \infty$

⇓

SE ISOLANTE LOCALIZZATO $\vec{P}(\vec{r}\,') = 0$

$$\rho_{POL}(\vec{r}) \stackrel{def}{=} -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) = \text{CAMPO SCALARE}$$

$$V_{POL}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r \frac{\rho_{POL}(r')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

SE LA POLARIZZAZIONE VARIA NELLO SPAZIO IN MODO CHE LA SUA DIVERGENZA $\neq 0$

⇓

SI CREA UNA CARICA DI POLARIZZAZIONE $= -\text{DIV}\,\vec{P}(\vec{r})$

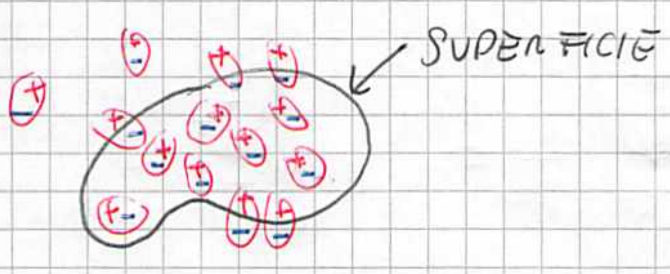
CARICA DI POLARIZZAZIONE CONTENUTA IN UN VOLUME V

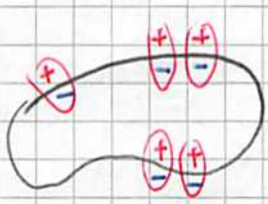
TEOREMA DIVERGENZA

$$Q_{\substack{POL \\ V}} = \int_V d^3 r \, \rho_{POL}(\vec{r}) = \int_V d^3 r \, \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{P}(\vec{r})\right) \overset{\downarrow}{=} - \Phi_S\left(\vec{P}(\vec{r})\right)$$

$$\boxed{Q_{\substack{POL \\ V}} = - \Phi_S\left(\vec{P}\right)}$$

- RELAZIONE SIMILE TEOREMA DI GAUSS
- SOLO LA POLARIZZAZIONE DI SUPERFICIE CONTRIBUISCE ALLA CARICA TOTALE NEL VOLUME





NEL BILANCIO DELLA CARICA SOLO I DIPOLI ALLA SUPERFICIE CONTRIBUISCONO

$$Q_{\substack{POL \\ V}} = -3 + 2 = -1$$

CARICHE SUPERFICIALI DI POLARIZZAZIONE

DIELETTRICO $\vec{P}(\vec{r}) \neq \vec{0}$

VUOTO $\vec{P}(\vec{r}) = 0$

$\hat{n}(\vec{r})$ → NORMALE USCENTE DALLA SUPERFICIE DEL DIELETTRICO

SUPERFICIE DIELETTRICO/VUOTO

NEL CORPO DIELETTRICO $\rho_{pol}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})$

ALLA SUPERFICIE?

ZOOM

$$\Phi_{\substack{\text{CILINDRO}}}(\vec{P}) \overset{h \to 0}{=} \overbrace{S(-\vec{P} \cdot \hat{n})}^{\text{LATO DIELETTRICO}} + \overbrace{S \cdot (\vec{0} \cdot \hat{n})}^{\text{LATO VUOTO}} = -\underset{\vee}{Q_{pol}}$$

CILINDRO DI ALTEZZA h E FASCIE DI AREA S // A SUPERFICIE

$\Downarrow$

$$\frac{\underset{\vee}{Q_{pol}}}{S} = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\boxed{\sigma_{pol}(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})}$$

ESEMPIO:

CILINDRO CON POLARIZZAZIONE UNIFORME // AL SUO ASSE

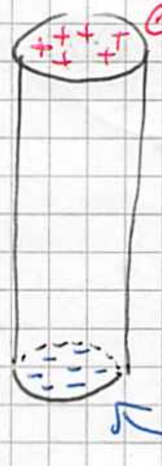
$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}_0$ SE $\vec{r} \in$ CILINDRO

- NEL VOLUME $\rho_{POL}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_0 \underbrace{=}_{\text{DERIVATA DI UNA COSTANTE}} 0$

- SULLE FACCE LATERALI $\sigma_{POL} = \vec{P}_0 \cdot \hat{n} \underset{\hat{n} \perp \vec{P}_0}{=} 0$

- SULLA FACCIA SUPERIORE $\sigma_{POL} = \vec{P}_0 \cdot \hat{n} \underset{\hat{n} // \vec{P}_0}{=} |P_0| > 0$

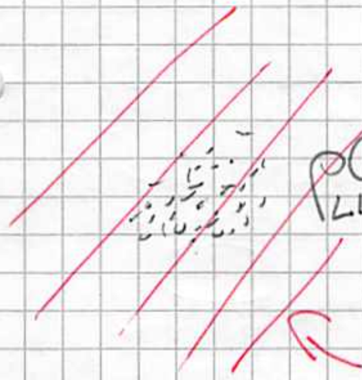
- SULLA FACCIA INFERIORE $\sigma_{POL} = \vec{P}_0 \cdot \hat{n} = -|P_0| < 0$



CARICA SUPERFICIALE POSITIVA

CARICA SUPERFICIALE NEGATIVA

CAMPO DI INDUZIONE ELETTRICA $\vec{D}$



$\rho_{LIB}(\vec{r})$ = CARICHE LIBERE

MEZZO DIELETTRICO

CARICHE TOTALI NEL SISTEMA

$$\rho_{TOT}(\vec{r}) = \rho_{LIB}(\vec{r}) + \rho_{POL}(\vec{r}) = \rho_{LIB}(\vec{r}) - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r}) \qquad (1)$$

1^a EQ DI MAXWELL $\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\rho_{TOT}(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad (2)$

SE VOGLIO ~~CONSIDERARE~~ SOLO LE CARICHE LIBERE

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})\right) \overset{(1)+(2)}{=} \rho_{LIB}(\vec{r})$$

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}) \overset{def}{=} \text{CAMPO VETTORIALE INDUZIONE ELETTRICA} \overset{def}{=} \varepsilon_0\vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\vec{r}) = \rho_{LIB}(\vec{r})}$$

1^a EQ. DI MAXWELL NELLA MATERIA

IMPORTANTE: IN GENERALE $\vec{\nabla}\wedge\vec{D}(\vec{r}) \neq \vec{0}$!

TEOREMA DI GAUSS PER $\vec{D}(\vec{r})$

$$\int_V \rho_{LIB}(\vec{r})\, d^3r \overset{\text{1ª EQ MAX NELLA MATERIA}}{=} \int_V \overset{\text{div}}{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\vec{r})}\, d^3r \overset{\text{TEO. DIVERGENZA}}{=} \int_S d^2\vec{a}\cdot\vec{D}(\vec{r}) = \Phi_S(\vec{D})$$

$$\boxed{\Phi_S(\vec{D}) = \text{CARICHE LIBERE CONTENUTE IN } S}$$

COSTANTE DIELETTRICA ε_r

- SE → $\vec{E}(\vec{r})$ VARIA POCO SU SCALA ATOMICA
  → $\vec{E}(\vec{r})$ NON È TROPPO INTENSO

$\vec{P}(\vec{r})$ È LINEARE IN $\vec{E}(\vec{r})$

⇓

SUSCETTIVITÀ ELETTRICA

$$\boxed{\vec{P}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})}$$

$\overleftrightarrow{\chi}(\vec{r})$ È UNA MATRICE 3x3
PER OGNI PUNTO DELLO SPAZIO
(CAMPO TENSORIALE DI RANGO 2)

SE MATERIALE È ISOTROPO (NON CI SONO DIREZIONI PRIVILEGIATE)

(MATERIALI ISOTROPI: LIQUIDI, AMORFI, CRISTALLI A SIMMETRIA CUBICA)

$\vec{P}(\vec{r}) \parallel \vec{E}(\vec{r})$

⇓

$$\boxed{\vec{P}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \chi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})}$$

LEZ 10,5

$\chi(\vec{r})$ CAMPO SCALARE

$[\chi]$ = ADIMENSIONALE ($\varepsilon_0 E$ STESSE DIMENSIONI DI P)

PER SEMPLICITÀ CONSIDERIAMO SOLO ISOTROPI

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi(\vec{r}) \vec{E}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \varepsilon_r(\vec{r}) \stackrel{def}{=} 1 + \chi(\vec{r}) \stackrel{def}{=} \text{COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA} \\ \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r(\vec{r}) \, \vec{E}(\vec{r}) \end{gathered}}$$

$$[\varepsilon_r] = [\text{ADIMENSIONALE}]$$

NEL VUOTO $\vec{P} = 0$ $\chi = 0$ $\varepsilon_r = 1$

RIASSUNTO PROBLEMA ELETTROSTATICO NELLA MATERIA

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_{LIB}(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \\ \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_r(\vec{r}) \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \end{cases}$$

DATI $\rho_{LIB}(\vec{r})$, $\varepsilon_r(\vec{r})$ E $\vec{E}(\infty)$

C'È UNA E UNA SOLA SOLUZIONE

ESEMPI DI ε_r

SOSTANZA	ε_r
VUOTO	1
ARIA, T=0°, 1ATM	1,00059
H_2O, GAS, T=110°, 1ATM	1,0126
H_2O, LIQUIDO, T=20°	80
VETRO PIREX SOLIDO, 20°	4
METALLI	∞

SOLUZIONE EQ. DI MAXWELL CON DIELETTRICO OMOGENEO

$\varepsilon_r(\vec{r}) = \varepsilon_r$ INDIPENDENTE DA $\vec{r}$ dove $\vec{E}(\vec{r}) \neq 0$

1ª EQ $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_{LIB}(\vec{r}) \rightarrow \vec{\nabla}(\varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r})) = \rho_{LIB}(\vec{r})$

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\rho_{LIB}(\vec{r})}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \\ \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = 0 \end{cases}}$$

COME EQ.! NEL VUOTO CON $\dfrac{\rho_{LIB}(\vec{r})}{\varepsilon_r}$ AL POSTO DI $\rho(\vec{r})$

$\Downarrow$

$\vec{E}(\vec{r})$: SOLUZIONE LA STESSA DEL VUOTO DIVISA PER ε_r

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int d^3r' \frac{\rho_{LIB}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int d^3r' \frac{\rho_{LIB}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

CARICA DI POLARIZZAZIONE DIELETTRICO OMOGENEO

$\rho_{POL}(\vec{r}) = ?$ $\quad\quad \rho_{TOT}(\vec{r}) = \rho_{LIB}(\vec{r}) + \rho_{POL}(\vec{r})$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_{TOT}(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{LIB}(\vec{r}) + \rho_{POL}(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{LIB}(\vec{r})}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

$$\boxed{\rho_{TOT}(\vec{r}) = \frac{\rho_{LIB}(\vec{r})}{\varepsilon_r}}$$

$$\boxed{\rho_{POL}(\vec{r}) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \rho_{LIB}(\vec{r})}$$

- VALIDE SOLO NEL CASO OMOGENEO!
- MA IL DIELETTRICO <u>NON DEVE</u> (COME NEL CAPITOLO PRECEDENTE) TUTTO LO SPAZIO DOVE $\vec{E}(\vec{r}) \neq 0$
- SE $\rho_{LIB}(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \rho_{POL}(\vec{r}) = 0$

LEGGE DI COULOMB FRA CARICHE IMMERSE IN UN MEZZO DIELETTRICO UNIFORME ε_r CHE OCCUPA TUTTO LO SPAZIO DOVE $\vec{E}(\vec{r}) \neq 0$

N CARICHE $\{q_i\}_{i=1,2,\dots N}$ IN $\{\vec{r}_i\}$
[LIBERE]

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

FORZA DI COULOMB SULLA CARICA $\vec{r}_k$

$$\vec{F}_k = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i\neq k} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r}_k-\vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}_k-\vec{r}_i}{|\vec{r}_k-\vec{r}_i|}$$

ENERGIA PER POSIZIONARE DA $+\infty$ LE N CARICHE

$$ENE = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$$

SE ABBIAMO UNA DISTRIBUZIONE DI CARICHE LIBERE $\rho_{LIB}(\vec{r})$

$$ENE = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho_{LIB}(\vec{r})\rho_{LIB}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{2}\int d^3r \, \rho_{LIB}(\vec{r}) V(\vec{r})$$

$$\boxed{ENE = \frac{1}{2}\int d^3r \, \rho_{LIB}(\vec{r}) V(\vec{r})}$$

DIMOSTRATA QUI PER ε_r UNIFORME MA VALIDA ANCHE PER $\varepsilon_r(\vec{r})$ NON-UNIFORME

QUINDI IN QUESTO CASO LA PRESENZA DEL DIELETTRICO RIDUCE DI UN FATTORE

$$\frac{1}{\varepsilon_2}$$

- LA FORZA, IL CAMPO ELETTRICO, E L'ENERGIA

IN H_2O, LIQUIDA $\Rightarrow \varepsilon_2 = 80$

$\Downarrow$

LE FORZE ELETTROSTATICHE E L'ENERGIA RIDOTTO DI $\frac{1}{80}$!

SALE DA CUCINA CRISTALLO CON Na^+ e Cl^- SI SCIOGLIE NELL'ACQUA PERCHÉ ENERGIA DI COESIONE FRA IONI RIDOTTI DI $\frac{1}{80}$

ENERGIA IN FUNZIONE DEI CAMPI $\vec{E}(\vec{r})$ E $\vec{D}(\vec{r})$

$$ENE = \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho_{LIB}(\vec{r})\, V(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\vec{r}) = \rho_{LIB}(\vec{r}) \qquad \vec{\nabla} V(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$$

POSSIAMO RIPETERE LA DIMOSTRAZIONE FATTA PER IL VUOTO RIMPIAZZANDO

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ CON

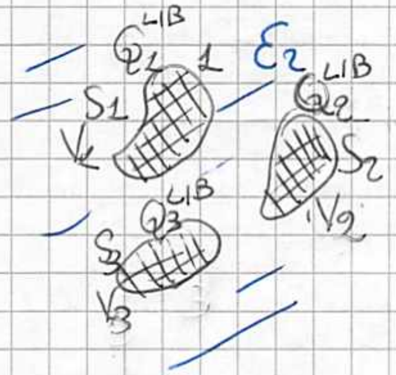
$$\boxed{ENE = \frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r})}$$

NEL VUOTO $\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$

RITROVIAMO QUINDI L'EQUAZIONE

$$ENE = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int d^3r\, |\vec{E}(\vec{r})|^2$$

N-CORPI CONDUTTORI SENZA CARICHE LIBERE NELLO SPAZIO FRA I CORPI IMMERSE IN UN DIELETTRICO UNIFORME ε_r (CHE OCCUPA TUTTO LO SPAZIO DOVE $\vec{E}(\vec{r}) \neq 0$)

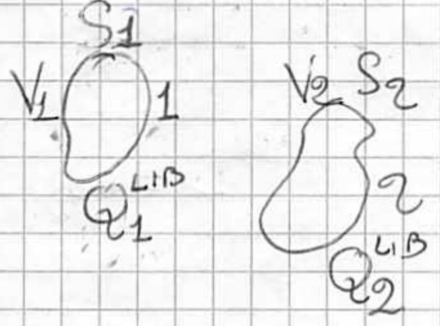


$$Q_i^{LIB} = \int_{S_i} d^2a \; \sigma_{LIB}(\vec{r})$$

$$\boxed{ENE = \frac{1}{2}\int d^3r \, \rho_{LIB}(\vec{r}) V(\vec{r}) = \frac{1}{2}\sum Q_i^{LIB} V_i}$$

DIMOSTRATA PER IL CASO ε_r UNIFORME MA VALIDA ANCHE PER IL CASO NON-UNIFORME

CAPACITÀ E ENERGIA DI UN CONDENSATORE IN PRESENZA DI ε_2 UNIFORME (IN TUTTO LO SPAZIO DOVE $\vec{E} \neq 0$)



$$\boxed{C^{DIE} = \frac{Q_{1\,LIB}^{DIE}}{V_1 - V_2}}$$

DEFINIZIONE CAPACITÀ

SOLUZIONE NEL VUOTO

$$\left(V_1^{VUOTO} - V_2^{VUOTO}\right) = \frac{1}{C^{VUOTO}} Q_{1\,LIB}^{VUOTO}$$

$$ENE = \frac{1}{2} \left(Q_{1\,LIB}^{VUOTO}\right)^2 C^{VUOTO}$$

SOLUZIONE NEL DIELETTRICO

$$V_1^{DIE} - V_2^{DIE} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{1}{C^{VUOTO}} Q_{1\,LIB}^{DIE}$$

$$\boxed{C^{DIE} = \varepsilon_2 C^{VUOTO}}$$

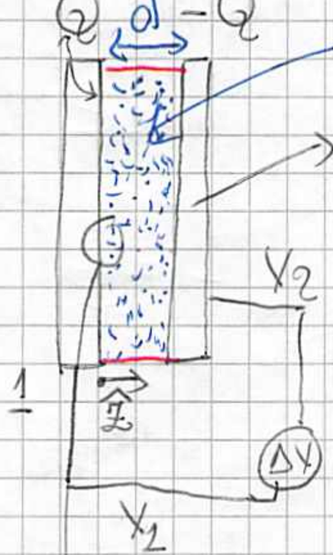
$$ENE = \frac{1}{2} \left[Q_{1\,LIB}^{DIE}\right]^2 C^{DIE} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[Q_{1\,LIB}^{DIE}\right]^2 \varepsilon_2 C^{VUOTO}$$

LA CAPACITÀ E L'ENERGIA IMMAGAZZINATA (A PARITÀ DI CARICA Q^{LIB}) È AUMENTATA DI UN FATTORE ε_2 !

LEZ 17.5

ESEMPIO: CONDENSATORE A PLACCHE PIANE CON DIELETTRICO FRA LE ARMATURE (ε_r UNIFORME)



MEZZO DIELETTRICO

PLACCHE METALLICHE DI SUPERFICIE S

$\left.\begin{matrix} +Q \\ -Q \end{matrix}\right\}$ CARICHE SULLE PLACCHE METALLICHE

$$Q_1^{LIB} = Q = \int_{S_1} \sigma_{LIB}(\vec{r})\, d^2a$$

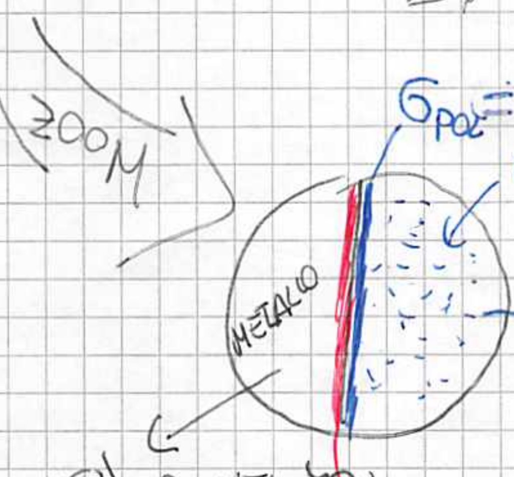
TRA LE PLACCHE

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\sigma_{LIB}}{\varepsilon_0} \hat{z} = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \hat{z}$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = -\int_{L_{2\to 1}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{d}{S}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$\sigma_{POL} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_{LIB} < 0$ SULLA FACCIA DEL DIELETTRICO



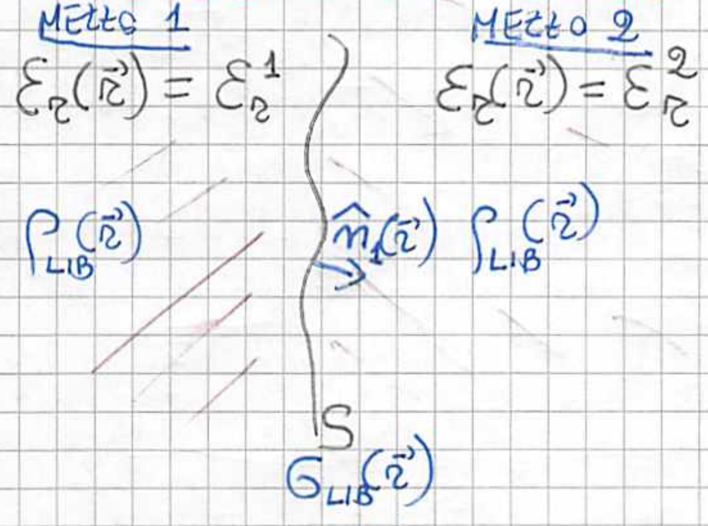
$\rho_{TOT}(\vec{r}) = 0$ NEL DIELETTRICO

$\rho_{TOT}(\vec{r}) = 0$ NEL METALLO

$\sigma_{LIB} > 0$ SULLA FACCIA DEL METALLO

$$\sigma_{TOT} = \sigma_{LIB} + \sigma_{POL} = \sigma_{LIB} - \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \sigma_{LIB} = \frac{\sigma_{LIB}}{\varepsilon_r}$$

DISCONTINUITÀ / CONTINUITÀ CAMPI $\vec{E}$ E $\vec{D}$ ALLA FRONTIERA FRA DUE MEZZI DIELETTRICI - CARICHE DI SUPERFICIE



NEL MEZZO 1

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\rho_{LIB}(\vec{r})}{\varepsilon_r^1 \varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \end{cases}$$

SE SERVE

$$\rho_{POL}(\vec{r}) = -\frac{\varepsilon_r^1 - 1}{\varepsilon_r^1} \rho_{LIB}(\vec{r})$$

NEL MEZZO 2

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\rho_{LIB}(\vec{r})}{\varepsilon_r^2 \varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \end{cases}$$

SE SERVE

$$\rho_{POL}(\vec{r}) = -\frac{\varepsilon_r^2 - 1}{\varepsilon_r^2} \rho_{LIB}(\vec{r})$$

ALL' INTERFACCIA

CAMPO $\vec{E}$ LATO MEZZO 2

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_{TOT}(\vec{r})}{\varepsilon_0} \xrightarrow{\text{DIMOSTRAZIONE GIÀ FATTA}} \left[\vec{E}_2(\vec{r}) - \vec{E}_1(\vec{r})\right] \cdot \hat{n}_1(\vec{r}) = \frac{\sigma_{TOT}(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad \vec{r} \in S$$

LATO MEZZO 1

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{E}_{2\perp}(\vec{r}) = \vec{E}_{1\perp}(\vec{r}) \quad \vec{r} \in S$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_{LIB}(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \left[\vec{D}_2(\vec{r}) - \vec{D}_1(\vec{r})\right] \cdot \hat{n}_1(\vec{r}) = \sigma_{LIB}(\vec{r}) \quad \vec{r} \in S$$

ALL'INTERFACCIA IN ASSENZA DI CARICHE LIBERE ($\sigma_{LIB}(\vec{r})=0$)

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}\in S \ : \ & \vec{D}_{1\parallel}(\vec{r}) = \vec{D}_{2\parallel}(\vec{r}) \\ & \vec{E}_{1\perp}(\vec{r}) = \vec{E}_{2\perp}(\vec{r}) \\ & \sigma_{POL}(\vec{r}) = \left[\vec{E}_2(\vec{r}) - \vec{E}_1(\vec{r})\right]\cdot \hat{n}_1(\vec{r}) \end{aligned}}$$

$\vec{D}_{\parallel}$ CONTINUA

$\vec{E}_{\perp}$ CONTINUO

$\vec{E}_{\parallel}$ DISCONTINUO

ENERGIA PER FORMARE UNA DISTRIBUZIONE DI CARICA $\rho_{LIB}(\vec{r})$ IN PRESENZA DI UNA COSTANTE DIELETTRICA NON UNIFORME $\varepsilon_r(\vec{r})$

- DISTRIBUZIONE DI CARICA $\rho_{LIB}(\vec{r})$ PUÒ ESSERE CREATA GRADATAMENTE A PARTIRE DA UNA CONDIZIONE INIZIALE SENZA CARICHE

$$\rho^{\lambda}_{LIB}(\vec{r}) = \lambda \rho_{LIB}(\vec{r}) \qquad \text{SE } \lambda = 0 \quad \rho^{\lambda}_{LIB}(\vec{r}) = 0$$

$$\text{SE } \lambda = 1 \quad \rho^{\lambda}_{LIB}(r) = \rho_{LIB}(\vec{r})$$

- SE $V(\vec{r})$ È IL POTENZIALE OTTENUTO CON $\rho(\vec{r})$ IN PRESENZA DEL DIELETTRICO $\varepsilon_r(\vec{r})$

$$\Downarrow$$

$$V^{\lambda}(\vec{r}) = \underset{\text{DI } \rho^{\lambda}_{LIB}(\vec{r})}{\text{POTENZIALE}} = \lambda V(\vec{r})$$

- LAVORO CONTRO LE FORZE ELETTROSTATICHE PER PASSARE DA $\rho^{\lambda}_{LIB}(\vec{r})$ A

$$\rho^{\lambda+d\lambda}_{LIB}(\vec{r}) = (\lambda + d\lambda)\rho_{LIB}(\vec{r}) = \rho^{\lambda}_{LIB}(\vec{r}) + d\lambda\, \rho_{LIB}(\vec{r})$$

$$LAV_{\lambda \to \lambda + d\lambda} = \int d^3r \, [\overbrace{d\lambda\, \rho_{LIB}(\vec{r})}^{\text{CARICA AGGIUNTA}}] \; V^{\lambda}(\vec{r}) = \lambda d\lambda \int d^3r \, \rho_{LIB}(\vec{r}) V(\vec{r})$$

ENERGIA PER FORMARE LA DISTRIBUZIONE $\rho(\vec{r}) = ENE$

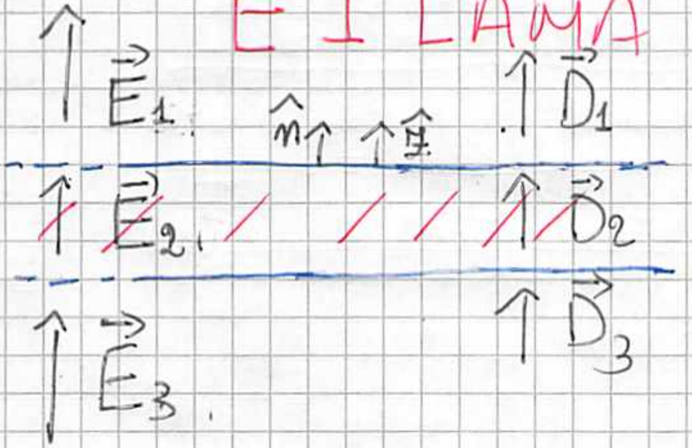
$$ENE = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} LAV_{\lambda \to \lambda + d\lambda} = \underbrace{\int_0^1 d\lambda\, \lambda}_{1/2} \int d^3r\, \rho_{LIB}(\vec{r})\, V(\vec{r})$$

$$\boxed{ENE = \frac{1}{2} \int d^3r\, \rho_{LIB}(\vec{r})\, V(\vec{r})}$$

QUINDI IL RISULTATO PRECEDENTE OTTENUTO PER UN CASO CON E_2 UNIFORME È GENERALIZZATO

ESEMPI DI SISTEMI CON $\varepsilon_r(\vec{r})$ NON OMOGENEA

LAMA DIELETTRICA CON $\vec{E} \perp$ LAMA



(1) $\varepsilon_r(\vec{r}) = 1$ VUOTO

(2) $\varepsilon_r(\vec{r}) = \varepsilon_r^L > 1$ DIELETTRICO

(3) $\varepsilon_r(\vec{r}) = 1$ VUOTO

DATO $\vec{E}_1 \perp$ LAMA, ε_r^L NELLA LAMA $\Big\} \longrightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) = ?$ $\vec{D}(\vec{r}) = ?$ $\sigma_{POL}(\vec{r}) = ?$

- NON CI SONO CARICHE LIBERE DI VOLUME $(\rho_{LIB}(\vec{r}) = 0)$

$$\Downarrow$$

$$\rho_{POL}(\vec{r}) = 0$$

- $\vec{E}_1 = E_1 \hat{z}$ $\quad \vec{E}_2 = E_2 \hat{z}$ $\quad \vec{E}_3 = E_3 \hat{z}$ | SODDISFA EQ. 1, 2 DI MAXWELL

$$\Downarrow$$

- $\vec{D}_1 = \varepsilon_0 E_1 \hat{z}$ $\quad \vec{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r^L E_2 \hat{z}$ $\quad \vec{D}_3 = \varepsilon_0 E_3 \hat{z}$ | SODD EQ 1 MAXWELL NEI MATERIALI

- CONDIZIONI AL BORDO

$\vec{D}_\perp(\vec{r})$ CONTINUO $\Rightarrow D_1 = D_2 = D_3$ $\nearrow$ $\boxed{E_3 = E_1}$ $\searrow$ $\boxed{E_2 = E_1/\varepsilon_r^L}$

- ALL'INTERFACCIA 1/2

$$\underset{\hat{n}}{\overset{\hat{z}}{}}\cdot\left(\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)=\frac{\sigma_{POL}}{\varepsilon_0}$$

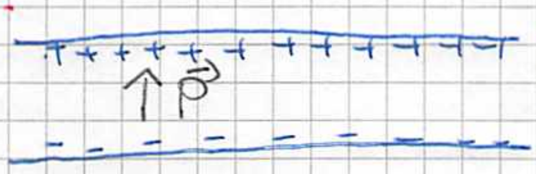
$$\boxed{\sigma_{POL}=\varepsilon_0 E_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon_2^L}\right)=\varepsilon_0\frac{\left(\varepsilon_2^L-1\right)}{\varepsilon_2^L}E_1}$$

ALL'INTERFACCIA 2/3

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=\frac{\sigma_{POL}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\sigma_{POL}=-\varepsilon_0 E_1\left(\frac{1}{\varepsilon_o^L}-1\right)=-\varepsilon_0\frac{\left(\varepsilon_2^L-1\right)}{\varepsilon_2^L}E_1}$$

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_1$$

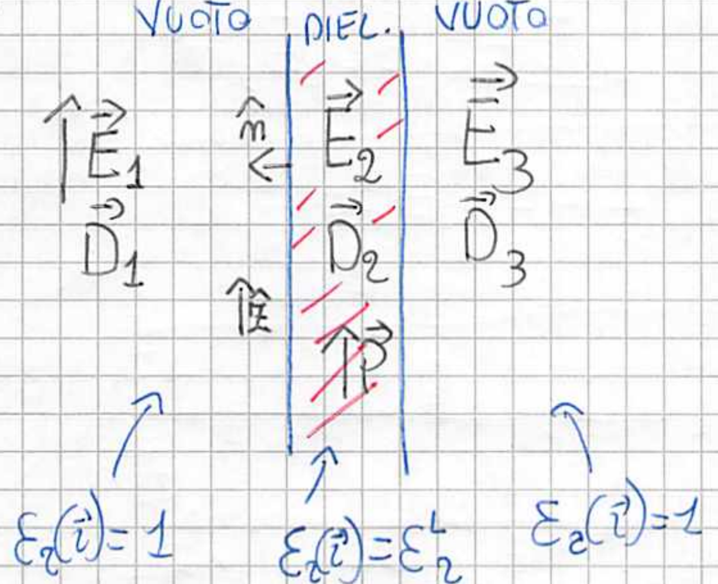


$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_1/\varepsilon_2^L$$

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_1$$

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}_2=\varepsilon_0\left(\varepsilon_2^L-1\right)\vec{E}_2=\varepsilon_0\frac{\left(\varepsilon_2^L-1\right)}{\varepsilon_2^L}\vec{E}_1$$

LAMA DIELETTRICA CON $\vec{E}$ // LAMA



DATI E_1 E ε_r^L

$E_2 = ?$ $E_3 = ?$ ....

$$\vec{E}_1 = E_1 \hat{z} \qquad \vec{E}_2 = E_2 \hat{z} \qquad \vec{E}_3 = E_3 \hat{z}$$

$\vec{E}_{//}$ CONTINUO ALL'INTERFACCIA

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_1 = E_2 = E_3}$$

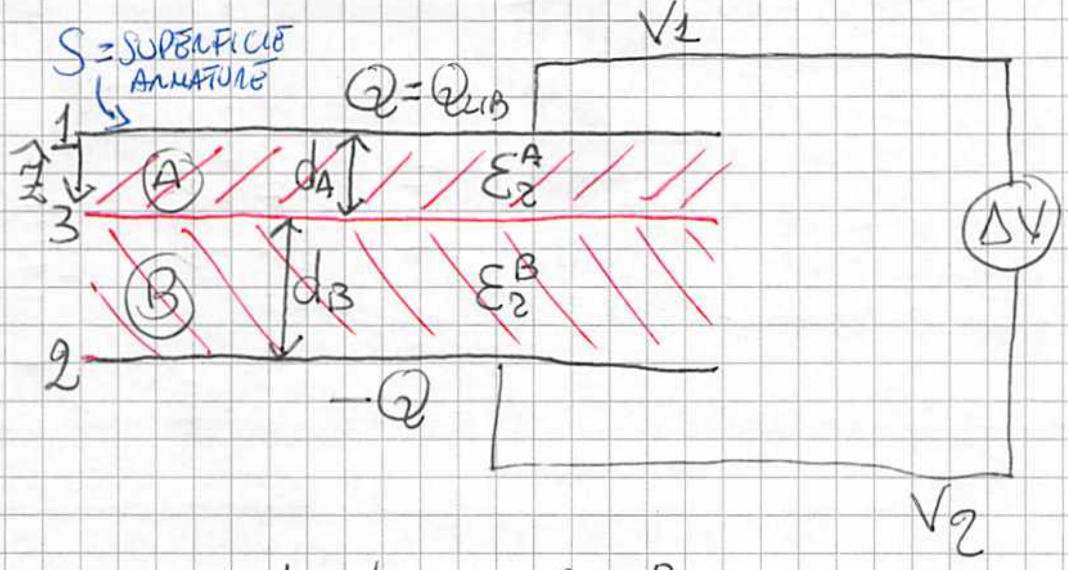
$$\vec{D}_1 = \frac{\vec{E}_1}{\varepsilon_0} = \vec{D}_3 \qquad \vec{D}_2 = \frac{\vec{E}_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r^L}$$

$\vec{D}_{//}$ DISCONTINUO ALL'INTERFACCIA

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r^L - 1) \vec{E}_2 = \varepsilon_0 (\varepsilon_r^L - 1) \vec{E}_1$$

PIU GRANDE DEL CASO PRECEDENTE MA NON PRODUCE CARICHE DI SUPERFICIE DATO CHE $\vec{P} \perp$ SUP.

CONDENSATORE CON DUE DIELETTRICI



DATI $d_A, d_B, S, \varepsilon_r^A, \varepsilon_r^B$

$C = ?$

SU 1 $\quad \sigma_{LIB} = \dfrac{Q}{S} \qquad \sigma_{TOT} = \dfrac{Q}{S\varepsilon_r^A}$

IN (A) $\quad \vec{E}_A = \hat{z}\,\dfrac{\sigma_{TOT}}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{S\varepsilon_0\varepsilon_r^A}$

SU 2 $\quad \sigma_{LIB} = -\dfrac{Q}{S} \qquad \sigma_{TOT} = -\dfrac{Q}{S\varepsilon_r^B}$

$$\vec{E}_B = \hat{z}\,\frac{\sigma_{TOT}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0\varepsilon_r^B}$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = -\int_{\ell_{2-1}} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = E_A d_A + E_B d_B = \left[\frac{d_A}{S\varepsilon_0\varepsilon_r^A} + \frac{d_B}{S\varepsilon_0\varepsilon_r^B}\right] Q$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{\left[\dfrac{d_A}{S\varepsilon_0\varepsilon_r^A} + \dfrac{d_B}{S\varepsilon_0\varepsilon_r^B}\right]}$$

SULL'INTERFACCIA 3 CHE SUCCEDE?

$$\hat{z} \cdot \left(\vec{E}_B - \vec{E}_A\right) = \frac{\sigma_{TOT}}{\varepsilon_0} \overset{\sigma_{LIB}=0}{=} \frac{\sigma_{POL}}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_{POL} = \frac{Q}{S}\left[\frac{1}{\varepsilon_2^B} - \frac{1}{\varepsilon_2^A}\right] \neq 0 \text{ SE } \varepsilon_2^A \neq \varepsilon_2^B !$$

- NOTATE CHE

$$C^{-1} = C_A^{-1} + C_B^{-1} \quad \text{DOVE } C_A = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2^A S}{d_A}$$

$$C_B = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2^B S}{d_B}$$

LA CAPACITÀ C È UGUALE A QUELLA DI DUE CONDENSATORI IN PARALLELO !