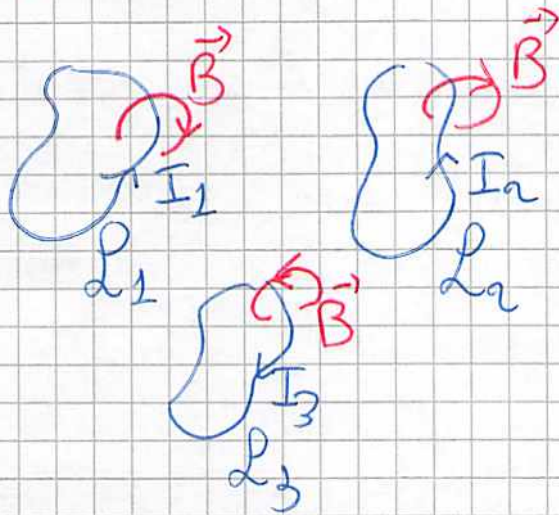


# ENERGIA MAGNETICA

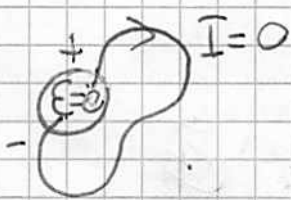


ENERGIA PER CREARE IL CAMPO  $\vec{B}(\vec{r})$

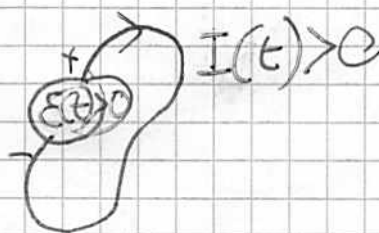
def  
= ENERGIA PER CREARE LE CORRENTI  
(SENZA CONSIDERARE L'ENERGIA DISSIPATA  
NELLE RESISTENZE, OVVERO NEL LIMITE  $R_i \rightarrow 0$ )

## UN CIRCUITO

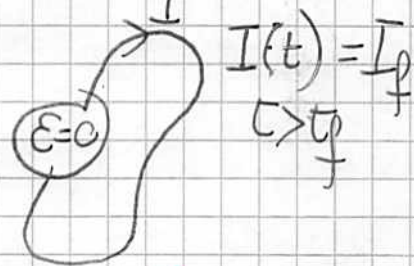
STATO INIZIALE



STATO TRANSITORIO



STATO FINALE



$ENE_i = 0$

$$ENE_f = \int_0^{t_f} dt \text{ LAVORO}_{\text{GENE}}(t) = \int_0^{t_f} dt I(t) \underbrace{E(t)}$$

$$= \int_0^{t_f} dt I(t) L \frac{dI}{dt} = \frac{1}{2} L I_f^2$$

$ENE_f = ?$

$E(t) = \dots$   
POTENZIALE CAPI  
GENERATORE

ANALOGIA MECCANICA  $L \leftrightarrow m$   $I \leftrightarrow v$   $\frac{1}{2} L I_f^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2$

# N CIRCUITI

CORRENTI FINALI:  $I_1^f, I_2^f, \dots, I_N^f$   
 " INIZIALI  $0, 0, \dots, 0$

$$ENE_f = \text{LAVORO FATTO DA N GENERATORI} = \int_0^{I_f} dt \left( \sum_{i=1}^N I_i(t) \mathcal{E}_i(t) \right) =$$

$$= \int_0^{I_f} dt \left( \sum_{i=1}^N I_i(t) \sum_{j=1}^N M_{ij} \frac{dI_j(t)}{dt} \right) \quad \text{DEVE } M_{ii} = L_i$$

$$ENE_f = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N I_i^f M_{ij} I_j^f$$

ENERGIA IN TERMINE DI  $\vec{j}(\vec{r})$  E  $\vec{A}(\vec{r})$

$$ENE = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N I_i M_{ij} I_j = \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint_{\mathcal{L}_i} \vec{B} \cdot d\vec{l}_i$$

$$\stackrel{\text{TEO STOKES}}{=} \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint_{\mathcal{L}_i} \left( \int_V d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}') \right)$$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint_{\mathcal{L}_i} \left( \int_V d\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}' \wedge \vec{A}(\vec{r}') \right)$$

NEL CASO DI CORRENTI DI VOLUME

$$ENE = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

# ENERGIA IN TERMINI DI $\vec{B}(\vec{r})$

$$ENE = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r})) \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \underbrace{\vec{B}(\vec{r})}_a \wedge \underbrace{\vec{A}(\vec{r})}_b \right) = \underbrace{\vec{\nabla}_a \cdot (\vec{B}(\vec{r}) \wedge \vec{A}(\vec{r}))}_a + \underbrace{\vec{\nabla}_b \cdot (\vec{B}(\vec{r}) \wedge \vec{A}(\vec{r}))}_b$$

$$= \vec{A}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r})) - \vec{B}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r}))$$

$$ENE = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \|\vec{B}(\vec{r})\|^2 - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} d^2a \cdot (\vec{B}(\vec{r}') \wedge \vec{A}(\vec{r}'))$$

$\begin{array}{ccc} \text{TEO DIV} & & \\ \downarrow & & \\ S_R & & \text{COMPENSAZIONE} \\ \sim R^2 & & \frac{1}{R^2} \quad \frac{1}{R} \end{array}$

$$ENE = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \|\vec{B}(\vec{r}')\|^2$$

$ENE \geq 0 \Leftrightarrow M_{ij}$  DEFINITA NON NEGATIVA

$N=1 \quad M_{11} = L \geq 0$

# EQUAZIONI DI MAXWELL

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{SCOPERTA DA FARADAY} \\ \text{E HENRY ATTRAVERSO} \\ \text{ESPERIMENTI} \end{array}$$

? EQ (4)

MAXWELL DA CONSIDERAZIONI MATEMATICHE HA DEDOTTO CHE LA 4<sup>a</sup> EQUAZIONE NON È COMPATIBILE CON LA CONSERVAZIONE DELLA CARICA OVVERO... CON L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \text{EQ. CONTINUITÀ}$$

INFATTI EQ. (4)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)) \stackrel{\downarrow}{=} 0$$

DIV. (ROT  $\vec{F}(\vec{r})$ ) = 0  $\forall \vec{F}(\vec{r})$   
! INCOMPATIBILE  
• CON EQ. CONTINUITÀ

# PROPOSTA DI MAXWELL

EQUAZIONI DI MAXWELL

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{array} \right.$$

CORRENTE DI SOSTANZA

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) \stackrel{4^a \text{ EQ}}{=} \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \stackrel{1^a \text{ EQ}}{=} - \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$$

LE EQ DI MAXWELL CONSERVANO LA CARICA

- DEDOTTE CON LA MATEMATICA
- CONFERMATE A POSTERUMI DALL'ESPERIENZA

PERCHÈ FARADAY NON HA SCOPERTO  
CON L'ESPERIMENTO

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

ENON LA CORRENTE DI SPPOSTAMENTO

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

PERCHÈ SE I CAMPI VARIANO NON TROPPO  
RAPIDAMENTE

COVANO

$\Delta t$  SCALA TEMPORALE VARIAZIONE

$\Delta L$  ESTENSIONE SPAZIALE CORRENTE  
VARIANTE

SE  $\frac{\Delta L}{\Delta t} \ll c$  (= VELOCITÀ LUCE)

BIOT-SAVANT QUASI-GIUSTA

REGIME QUASI  
STAZIONARIO

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}', t) \wedge \vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2 (\vec{r} - \vec{r}')} \end{cases}$$

NOTA SE  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \neq 0$

BIOT-SAVANT  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}') = 0$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t)$

NELLA DIMOSTRAZIONE DELLA QUARTA EQ MAXWELL  
STATICA ABBIAMO USATO  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}) = 0!$

REGIME-QUASISTAZIONARIO  $\neq$  4<sup>a</sup> EQ MAXWELL  
STATICA

# EQ MAXWELL NEL VUOTO

$$\rho(\vec{r}, t) = 0 \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 300'000 \text{ km/s}$$

• SIMMETRIA FRA EQUAZIONI DI  $\vec{E}$  E  $\vec{B}$

• SISTEMA EQ DIFFERENZIALI LINEARI  
OMOGENEE ACCOPPIATE

$$\text{SE } \left\{ \vec{E}_1(\vec{r}, t), \vec{B}_1(\vec{r}, t) \right\} \text{ e } \left\{ \vec{E}_2(\vec{r}, t), \vec{B}_2(\vec{r}, t) \right\}$$

SOLUZIONI

$$\left\{ \alpha \vec{E}_1 + \beta \vec{E}_2, \alpha \vec{B}_1 + \beta \vec{B}_2 \right\} \text{ SOLUZIONI}$$



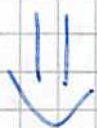
# ONDE ELETTROMAGNETICHE (SOLUZIONE EQ. MAXWELL NEL VUOTO)

EQ. (a)

EQ. (b)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \stackrel{\downarrow}{=} c^2 \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \stackrel{\downarrow}{=} -c^2 \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t))$$

$$= -c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)) + c^2 \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) \stackrel{\downarrow}{=} +c^2 \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \text{EQ. (1)}$$



$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{EQ. (5)}$$

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{EQ. (6)}$$

CIASCUNA DELLE COMPONENTI CARTESIANE EQUAZIONE DISACCOPIATA

$$\nabla^2 f(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

EQ. PROPAGAZIONE DELLE ONDE

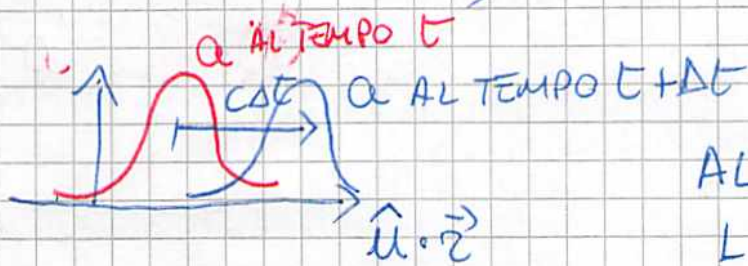
SOLUZIONE GENERALE:  $a(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct)$

SUPERPOSIZIONE DI FUNZIONI

$\hat{u}$ : DIREZIONE DI PROPAGAZIONE

AL TEMPO  $t + \Delta t$ :

$$a(\hat{u} \cdot \vec{r} - c(t + \Delta t)) = a(\hat{u} \cdot (\vec{r} - \hat{u}c\Delta t) - ct)$$



AL TEMPO  $t + \Delta t$   
LA SOLUZIONE TRASLA  
RIGIDAMENTE DI  
 $+ \hat{u}c\Delta t$

$\hat{u} \cdot \vec{r} = \text{COSTANTE}$   
ISOJURFACIE DI  
 $a$

DIMOSTRIAMO CHE  $a(\dots)$  È UNA SOLUZIONE  
DELL'EQUAZIONE D'ONDA

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} a(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct) = c^2 a''(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} a(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct) = u_x^2 a''(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct)$$

$$\nabla^2 a(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct) = |\hat{u}|^2 a''(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct)$$

⇓

$$\nabla^2 a(\dots) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} a(\dots) = 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

PER OTTENERE L'EQUAZIONE D'ONDA ABBIAMO  
 DERIVATO RISPETTO AL TEMPO L'EQ (a) E (k)



$$\text{EQ (1) (a) (b) (k)} \Rightarrow (5) (6)$$

MA NON

TUTTE LE SOLUZIONI DI (5) (6) NON  
 SONO NECESSARIAMENTE DELLE SOLUZIONI  
 DI EQ MAXWELL

SOLUZIONI EQ. MAXWELL

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} a(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct) \quad \vec{E} = \text{POLARIZZAZIONE CAMPO ELETTRICO}$$

EQ (1)

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{u} \cdot \vec{E} a(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct)$$

$$\hat{u} \cdot \vec{E} = 0$$

$\vec{E}(\vec{r}, t) \perp$  DIREZIONE  
 DI PROPAGAZIONE

ONDA TRASVERSA

EQ (a)

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -\hat{u} \wedge \vec{E} a'(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct)$$

$$= \frac{\hat{u} \wedge \vec{E}}{c} \frac{\partial}{\partial t} a(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct)$$

CAMPO STATICO

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\hat{u} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t)}{c} + \vec{B}(\vec{r})$$

IN ASSENZA DI CAMPI STATICI



$\vec{B}(\vec{r}, t) \perp$  DIREZIONE PROPAGAZIONE  
 $\perp \vec{E}(\vec{r}, t)$

RIASSUMENDO

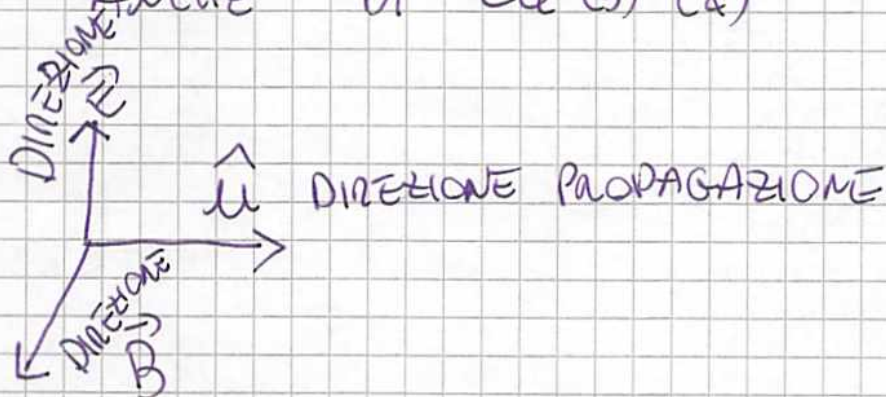
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon} a(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\beta} a(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct)$$

$$\vec{\epsilon} \cdot \hat{u} = 0 \quad \vec{\beta} \cdot \hat{u} = 0 \quad \vec{\beta} = \frac{\hat{u} \wedge \vec{\epsilon}}{c}$$



POTETE VERIFICARE CHE SIA SOLUZIONE  
ANCHE DI EQ (3) (4)



# ONDE MONOCROMATICHE ELETTROMAGNETICHE

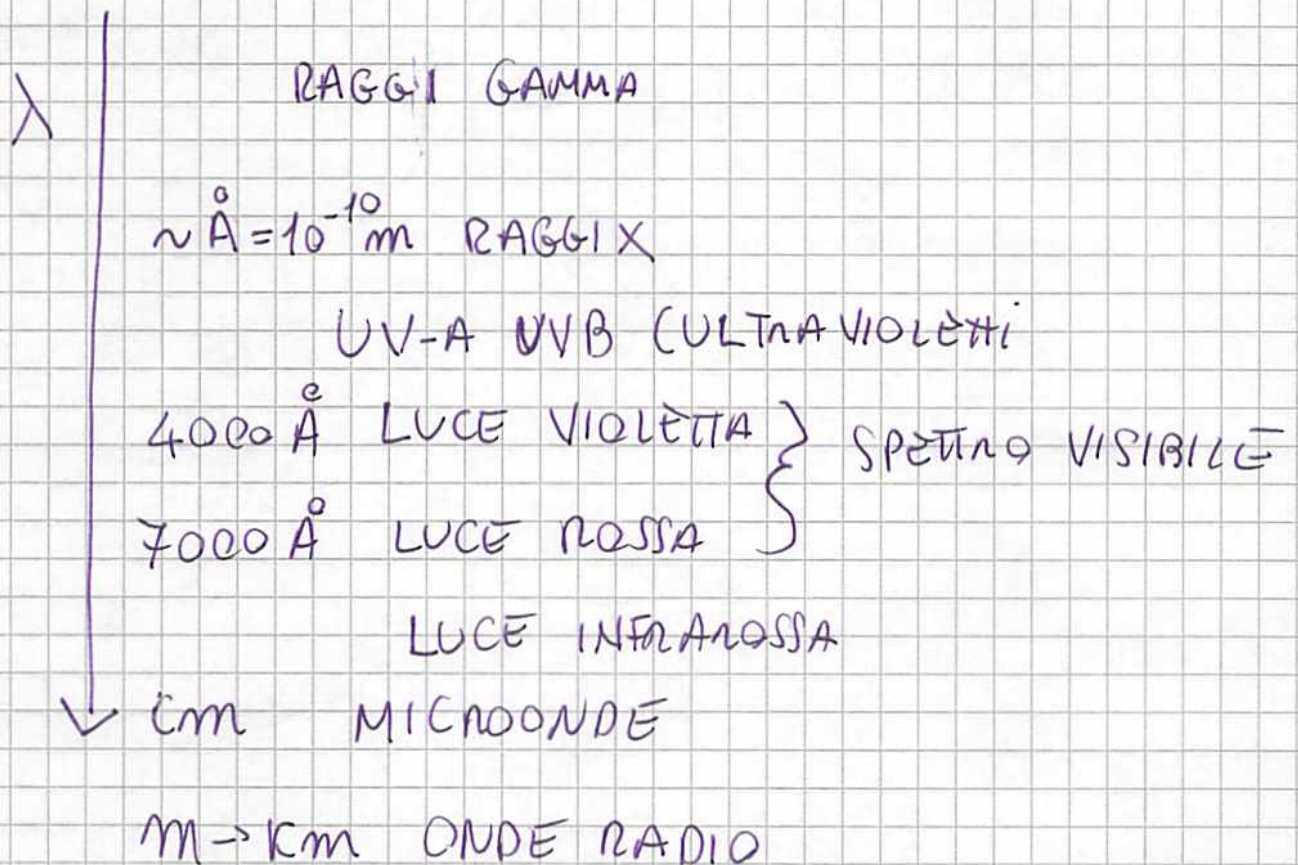
$$a(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct) = \cos\left(\frac{\omega}{c}(\hat{u} \cdot \vec{r} - ct) + \varphi\right) =$$

$$= \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)$$

$$\vec{k} = \hat{u} \frac{\omega}{c} = \hat{u} \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{VETTORE D'ONDA}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} c = \text{LUNGHEZZA D'ONDA}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \text{FREQUENZA}$$



# ETERE LUMINIFERO

- EQUAZIONI MAXWELL SONO VERE SOLO IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE PRIVILEGIATO?

ONDE IN UN FLUIDO SI PROPAGANO A VELOCITÀ  $v_F$  (ESEMPO VELOCITÀ DEL SUONO, VELOCITÀ DI GRUPPO ONDE DEL MARE) IN UN SISTEMA DOVE IL FLUIDO È A RIPOSO (LE ONDE SONORE EMESSE DA UN AEREO SUBSONICO O SUPERSONICO O DA UN CARRAMELO A RIPOSO, SI PROPAGANO TUTTE ALLA STESSA VELOCITÀ  $\sim 340 \text{ m/s}$ )

1864  $\leftrightarrow$  1905 VARI ESPERIMENTI PER TROVARE EVIDENZA DI UN ETERE LUMINIFERO E DEL SISTEMA INERZIALE PRIVILEGIATO DOVE QUESTO FOSSE A RIPOSO (NESSUNA EVIDENZA)

EINSTEIN: NON ESISTE UN SISTEMA DI RIFERIMENTO PRIVILEGIATO

- EQUAZIONI DI MAXWELL VERE IN QUALSIASI RIFERIMENTO INERZIALE (CLASSE DI SISTEMI CHE SI MUOVONO A VELOCITÀ COSTANTE FRA DI LORO)

$\Downarrow$   
VELOCITÀ DELLA LUCE COSTANTE IN TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO

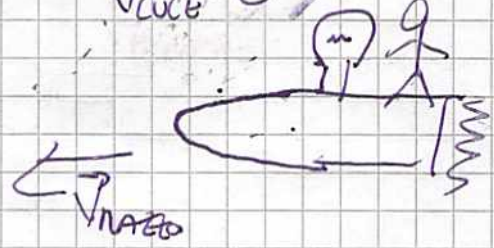
OSSERVATORE FERMO



$$V_{LUCE} = C$$

$$V_{LUCE} = C$$

OSSERVATORE IN MOVIMENTO

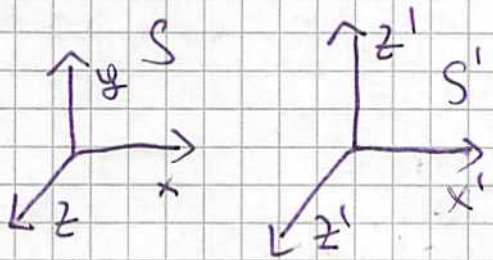


$$V_S = V_S$$

$$V_{SUONO} = V_S - V_{MOTO}$$

IL TEMPO NON È ASSOLUTO

TRASFORMAZIONI DI LORENTZ:



S' SI MUOVE CON VELOCITÀ  $V$  LUNGO L'ASSE X

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

SE  $v \ll c$   $\gamma \approx 1$   $t \approx t'$

↓  
TRASFORMAZIONI GALILEANE

TRASFORMAZIONI PER CAMPI  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{J}$ ,  $\rho$ . IN MODO TALE CHE IN TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALE LE EQUAZIONI DI MAXWELL SONO LE STESSO