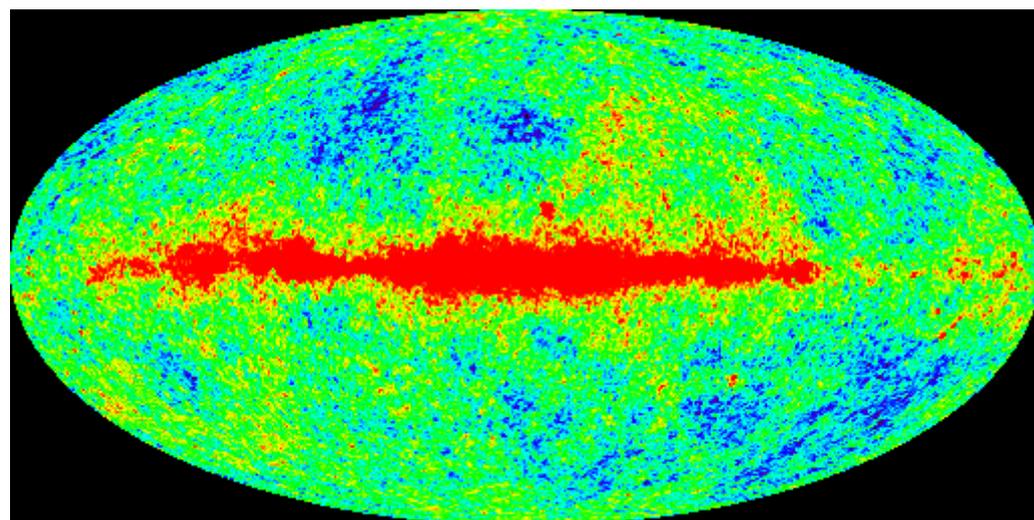
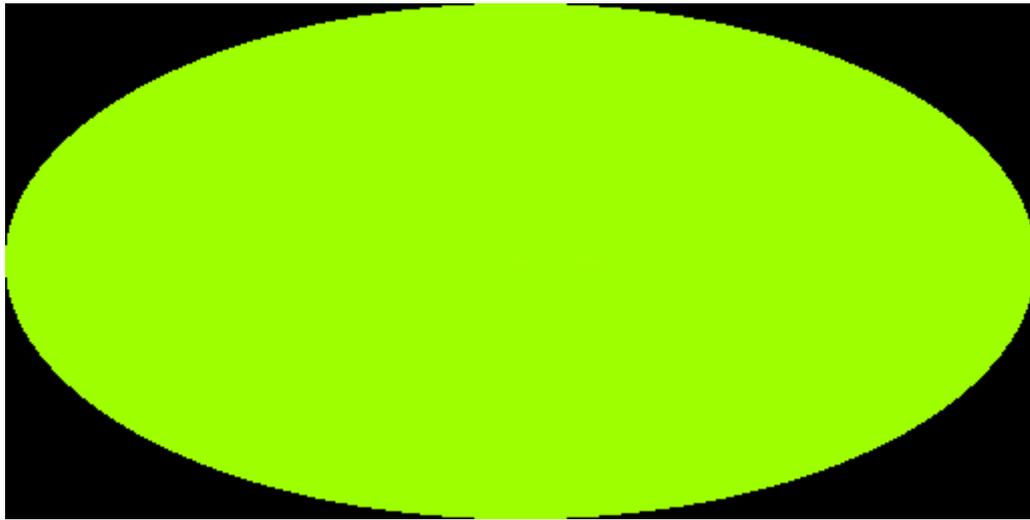




Lo spettro di potenza angolare della radiazione di fondo cosmica

F. Piacentini - Roma1

Mappe della radiazione di fondo cosmico (CMB)



Fluttuazioni di brillantezza attorno alla brillantezza di un corpo nero a $T_{cmb} = 2.725 \text{ K}$

$$BB(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$x = \frac{h\nu}{kT}$$

$$\Delta B(\nu, T) = \left. \frac{dBB(\nu, T)}{dT} \right|_{T=T_{cmb}} \Delta T$$

$$\Delta B(\nu, T) = \frac{x e^x}{e^x - 1} \frac{BB(\nu, T_{cmb})}{T_{cmb}} \Delta T$$

Posso esprimere le anisotropie in termini di fluttuazioni di temperatura ΔT



Il cielo a microonde – spettro di potenza angolare

- Cosa ci aspettiamo di misurare?
 - Le mappe riportano fluttuazioni di temperatura.

$$\Delta(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{T(\hat{\mathbf{n}}) - \langle T(\hat{\mathbf{n}}) \rangle}{\langle T(\hat{\mathbf{n}}) \rangle}$$

- ➔ In pratica assomiglia più a un rumore che a un segnale. Nell'universo primordiale non ci sono strutture, ma solo fluttuazioni casuali
- ➔ Siamo quindi interessati alle proprietà statistiche di questo *segnale*
- Sotto l'ipotesi di gaussianità tutta l'informazione statistica è contenuta nella funzione di correlazione angolare a due punti, che ci dice quanto sono correlati in media due punti separati in cielo da un angolo θ :

$$c(\theta) = \langle \Delta(\hat{\mathbf{n}})\Delta(\hat{\mathbf{n}}') \rangle \quad [\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = \cos(\theta)]$$

- La funzione di correlazione è la trasformata di Fourier dello spettro di potenza
 - ➔ La funzione di correlazione angolare è la trasformata di Legendre dello spettro di potenza angolare (dimostrato nelle prossime pagine)

$$c(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) C_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$



Il cielo a microonde – spettro di potenza angolare

For functions that live on a sphere, the analogue of a Fourier expansion is an expansion in *spherical harmonics*. The spherical harmonics are defined as

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

where P_{ℓ}^m are the associated Legendre functions, and ℓ and m are integers such that $\ell \geq 0$ and $|m| \leq \ell$. They have the symmetry property that

$$Y_{\ell, -m} = (-1)^m Y_{\ell m}^*,$$

where $*$ denotes complex conjugation. These functions form a complete orthonormal set on the unit sphere. The orthonormality means that

$$\int Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell' m'}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'},$$



Il cielo a microonde – spettro di potenza angolare

and the completeness means that we can expand any L^2 function Δ as

$$\Delta(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi),$$

where

$$a_{\ell m} \equiv \int Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) \Delta(\theta, \varphi) d\Omega.$$

We use the differential solid angle notation

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Also, we will sometimes replace θ and φ by the unit vector

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

$f(x)$ is an L^2 function if $\int_X |f(x)|^2 dx < \infty$



Il cielo a microonde – spettro di potenza angolare

With this notation, the so called addition theorem for spherical harmonics states that

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}') = \frac{2\ell + 1}{4\pi} P_{\ell}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}'),$$

where $P_{\ell} = P_{\ell}^0$ are the Legendre polynomials.

■ Quindi

$$c(\theta) = \langle \Delta(\hat{\mathbf{n}}) \Delta(\hat{\mathbf{n}}') \rangle$$

$$c(\theta) = \left\langle \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \right) \left(\sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} a_{\ell' m'}^* Y_{\ell' m'}^*(\mathbf{n}') \right) \right\rangle$$

$$c(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle Y_{\ell m}(\mathbf{n}) Y_{\ell' m'}^*(\mathbf{n}')$$



Il cielo a microonde – spettro di potenza angolare

$$c(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{m'=\ell'} \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle Y_{\ell m}(\mathbf{n}) Y_{\ell' m'}^*(\mathbf{n}')$$

- Sotto rotazione del sistema di riferimento, le armoniche sferiche sono modificate
 - I nuovi coefficienti $a'(l,m)$ dipendono da $a(l',m')$, con $l'=l$ (vedi slide successiva)
- Isotropia: non ci sono direzioni privilegiate.
 - Per ogni rotazione del mio sistema di riferimento, devo avere la stessa varianza dei coefficienti a_{lm} .
 - La varianza dipende da l e non da m . Valgono le relazioni: $\langle a_{\ell m}^* a_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_{\ell}$

$$c(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}')$$

$$c(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta)$$

- L'informazione presente nella correlazione a 2 punti $c(\theta)$ quindi può essere contenuta nello spettro di potenza angolare C_{ℓ} , varianza dei a_{lm}
- Ci serve un estimatore

$$u(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n M_n^m Y_n^m(\theta, \phi).$$

Gimbutas Z, Greengard L. A fast and stable method for rotating spherical harmonic expansions. J Comput Phys 2009;228(16):5621–7. (3)

1.1. Rotation operators

Let \mathbf{E} denote the usual coordinate system defined by the axes:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1), \quad (4)$$

and let \mathbf{F} be a rotated orthogonal coordinate system with the same origin and axes f_1, f_2, f_3 . We will occasionally refer to P_E as the coordinate representation of a point P with respect to E and P_F as the coordinate representation of P with respect to F .

We assume that (α, β, γ) are the standard Euler angles [1,15] that define the rotation from \mathbf{E} to \mathbf{F} using the z – y – z convention in a right-handed frame. That is, we first rotate by an angle α about the z -axis, then by an angle β about the new y -axis, and finally by an angle γ about the new z -axis.

Theorem 1 (See, for example, [1]). *Let (θ, ϕ) denote the coordinates of a point P in the system \mathbf{E} and let (θ', ϕ') denote the coordinates of P in the system \mathbf{F} . Then the function $u(P)$ defined in (3) can be expressed as*

$$u(\theta', \phi') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m'=-n}^n M_n^{m'} Y_n^{m'}(\theta', \phi'), \quad (5)$$

where

$$M_n^{m'} = \sum_{m=-n}^n D_n^{m',m} \cdot M_n^m. \quad (6)$$

The coefficients of the transformation are given by

$$D_n^{m',m} = e^{im\gamma} d_n^{m',m}(\beta) e^{im\alpha}, \quad (7)$$

where

$$d_n^{m',m}(\beta) = (-1)^{m'-m} [(n+m')!(n-m')!(n+m)!(n-m)!]^{1/2} r \sum_s (-1)^s \frac{(\cos \frac{\beta}{2})^{2(n-s)+m-m'} (\sin \frac{\beta}{2})^{2s-m+m'}}{(n+m-s)!s!(m'-m+s)!(n-m'-s)!}, \quad (8)$$

with the range of s determined by the condition that all factorials are non-negative.

Remark 1.1. The formula (8) is due to Wigner [18]. Note that the rotation operator uncouples spherical harmonics of different degree.



Il cielo a microonde – spettro di potenza angolare

- Estimatore dello spettro di potenza angolare

$$\langle a_{\ell m}^* a_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} C_\ell \quad \text{Spettro di potenza angolare}$$

$$\hat{C}_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} \bar{a}_{lm} \quad \text{Estimatore}$$

$$\langle \hat{C}_l \rangle_{\text{ens}} = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} \langle a_{lm} \bar{a}_{lm} \rangle_{\text{ens}}$$



$$= \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} C_l$$

usando la def. dello spettro di potenza



$$= C_l$$

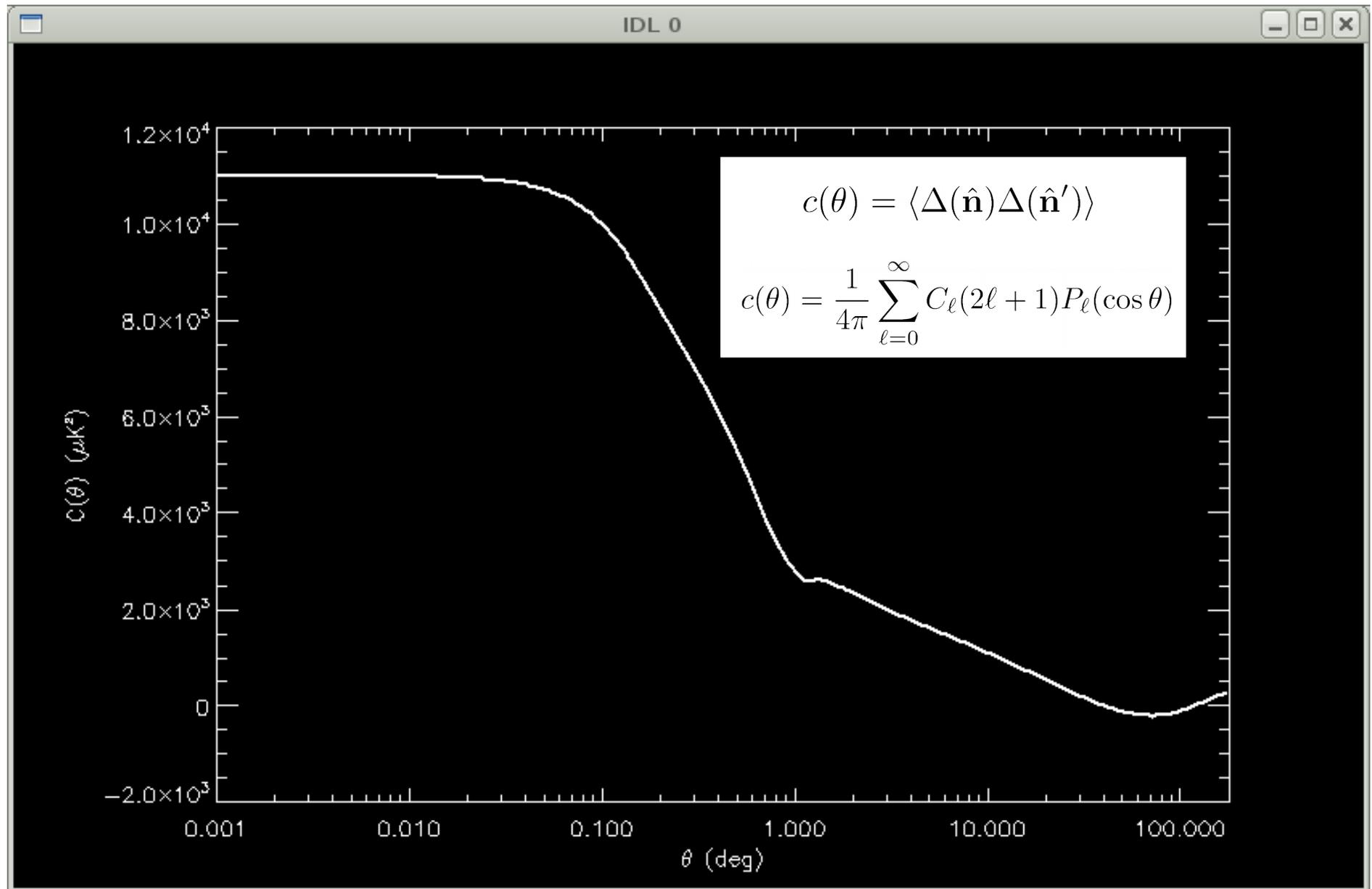
usando l'isotropia della CMB

↙
valore vero

$$\Delta(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

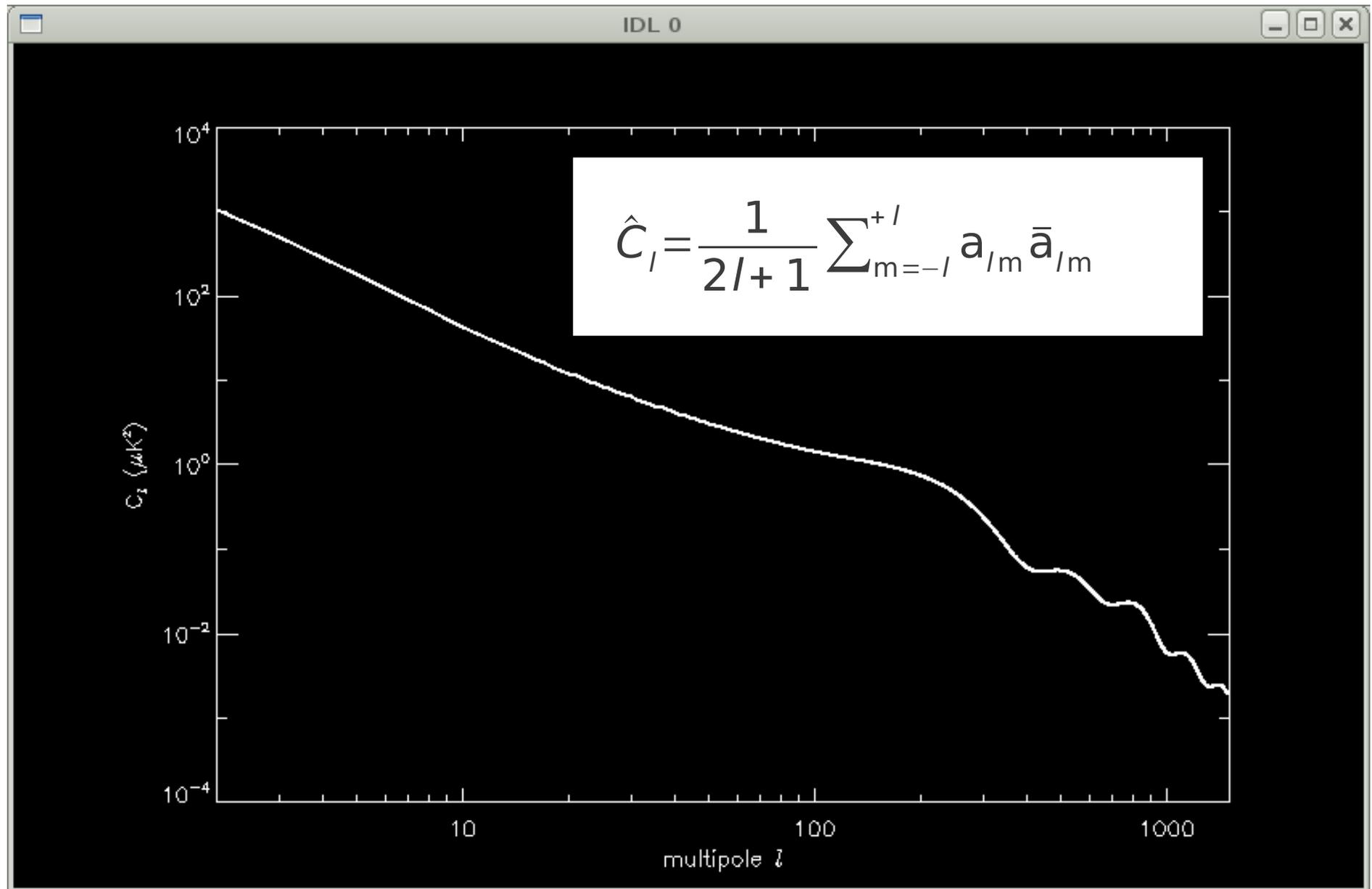
$$a_{\ell m} \equiv \int Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) \Delta(\theta, \varphi) d\Omega$$

Il cielo a microonde – spettro di potenza angolare

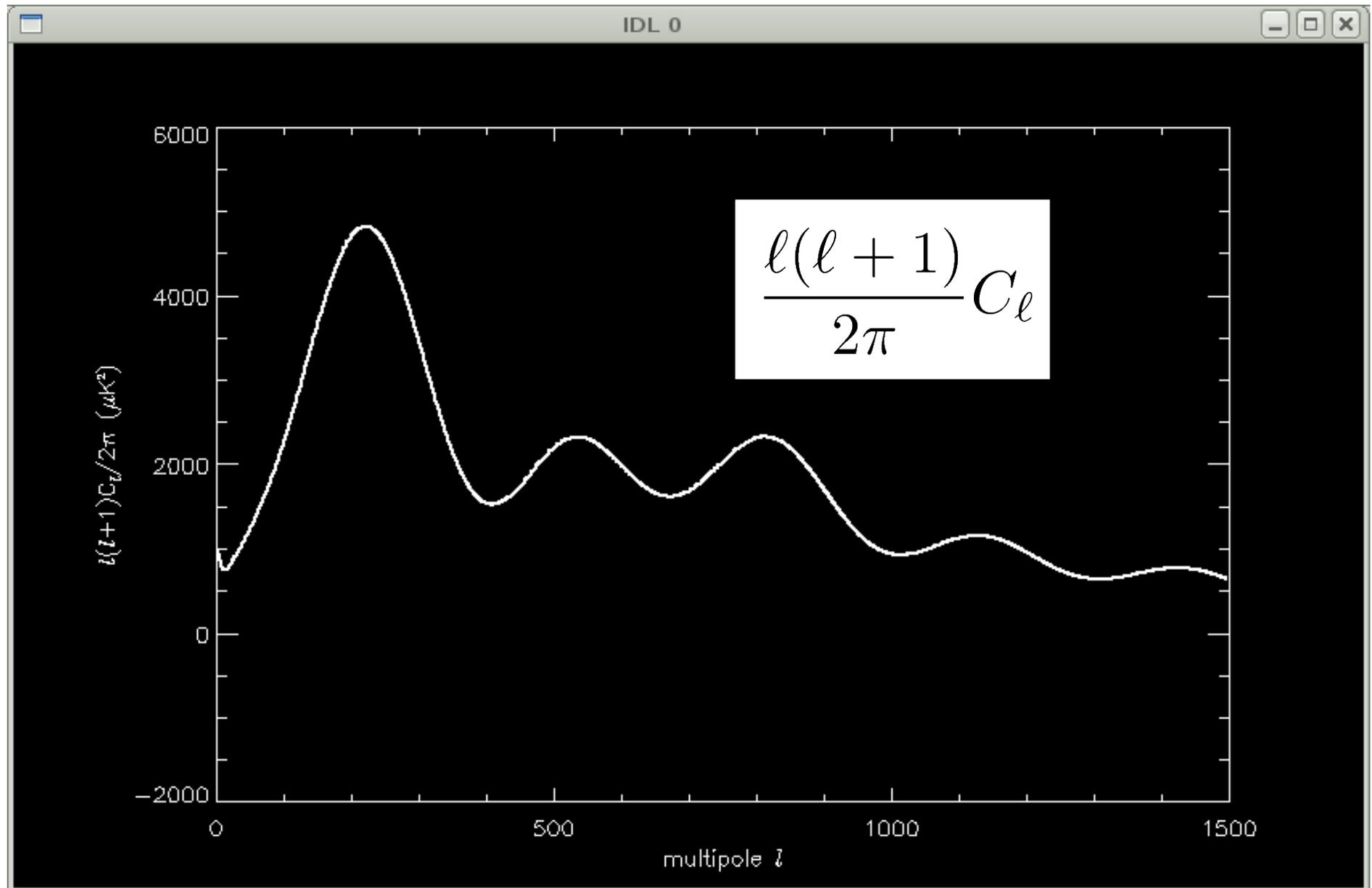




Il cielo a microonde – spettro di potenza angolare

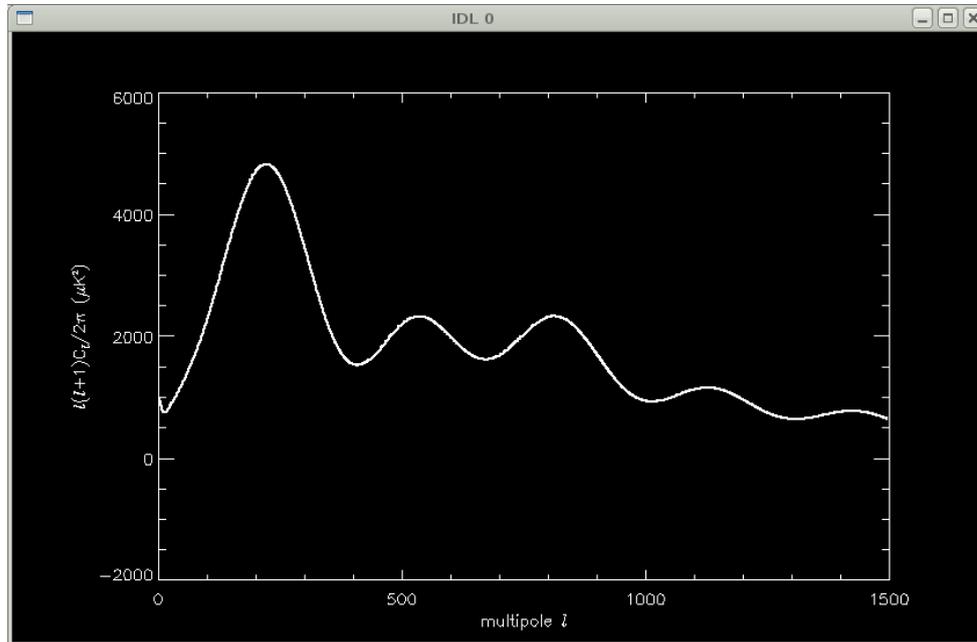
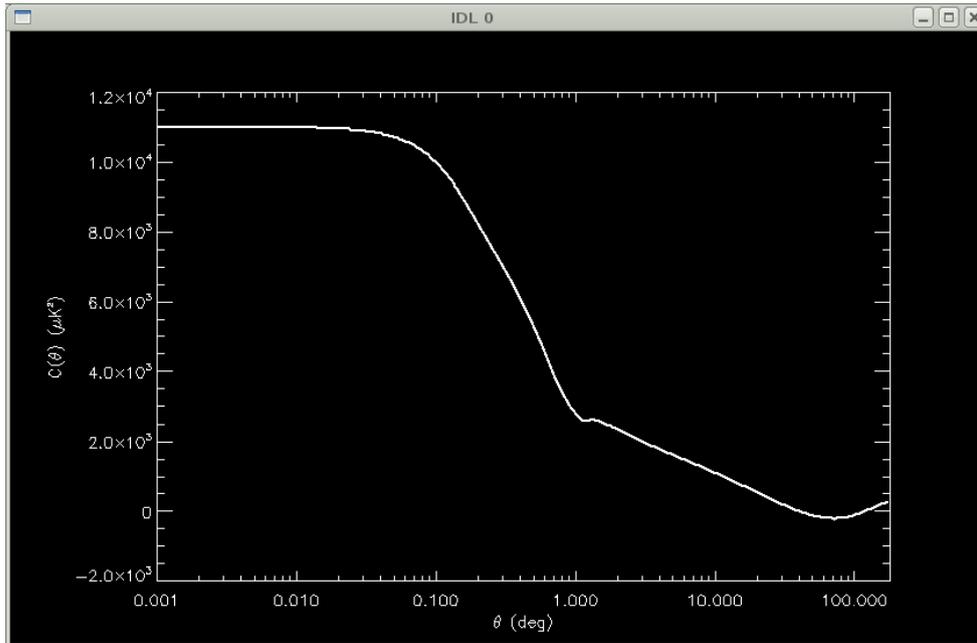


Il cielo a microonde – spettro di potenza angolare





Il cielo a microonde – spettro di potenza angolare



$c(\theta = 0) = \text{varianza mappa}$

$$c(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell}(2\ell + 1)P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$P_{\ell}(1) = 1$$

$$\text{Var}(\Delta) = c(\theta = 0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell}(2\ell + 1)$$

Il primo picco a $l=200$ corrisponde al bump a 1 grado

Lo spettro di potenza angolare e' piu' leggibile

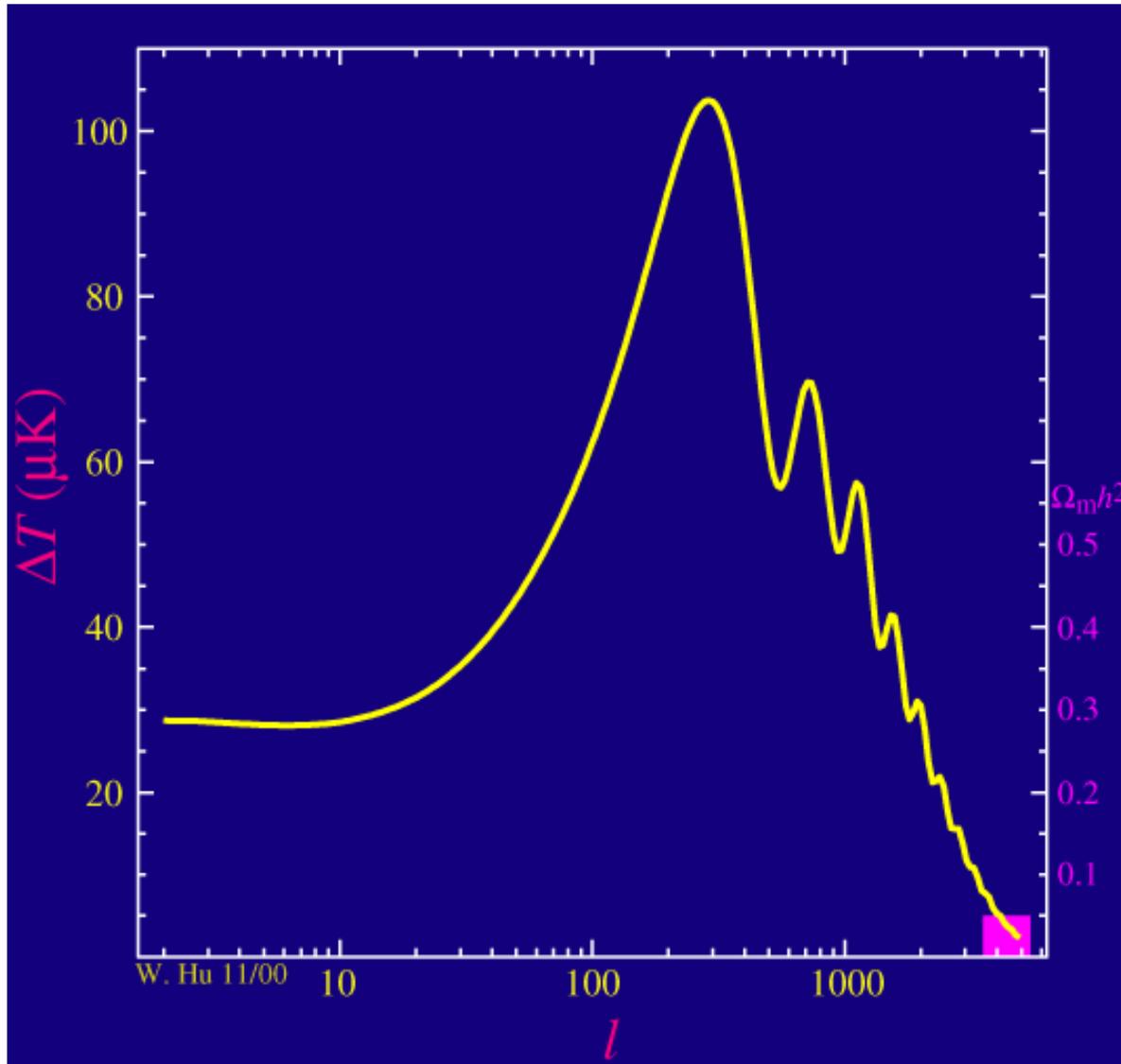
La maggior parte dei metodi di stima dei parametri cosmologici parte da misure di spettro di potenza angolare

Alcuni metodi si basano invece sulla funzione di correlazione (vedremo vantaggi e svantaggi)



Il cielo a microonde – spettro di potenza angolare

- Da un modello teorico e' possibile prevedere lo spettro di potenza angolare, o anche la funzione angolare correlazione a due punti



$$\Delta T^2 = \ell(\ell + 1)C_\ell/2\pi$$

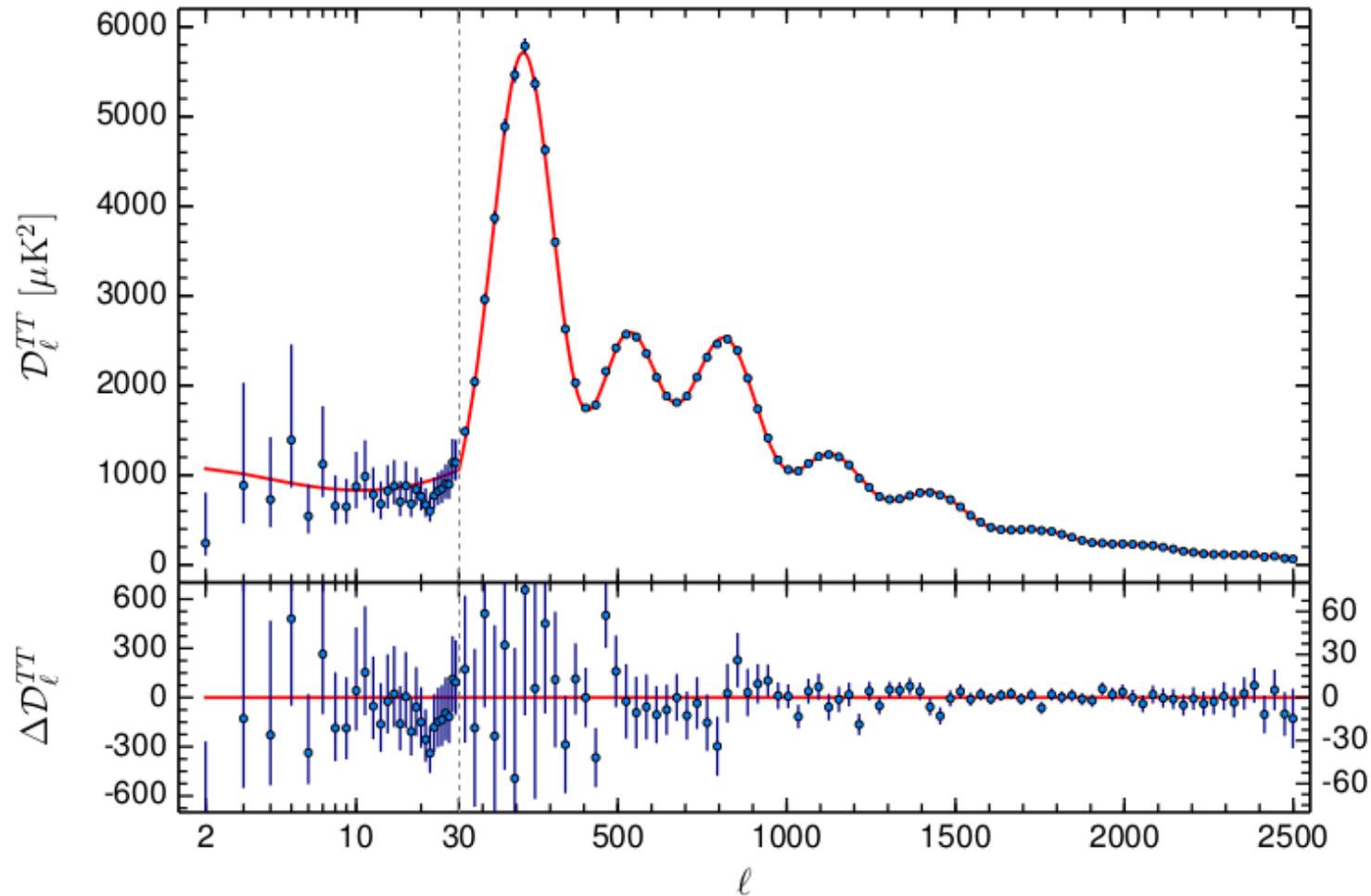


Fig. 9. The *Planck* 2015 temperature power spectrum. At multipoles $\ell \geq 30$ we show the maximum likelihood frequency averaged temperature spectrum computed from the *Planck* cross-half-mission likelihood with foreground and other nuisance parameters determined from the MCMC analysis of the base Λ CDM cosmology. In the multipole range $2 \leq \ell \leq 29$, we plot the power spectrum estimates from the *Commander* component-separation algorithm computed over 94 % of the sky. The best-fit base Λ CDM theoretical spectrum fitted to the *Planck* TT+lowP likelihood is plotted in the upper panel. Residuals with respect to this model are shown in the lower panel. The error bars show $\pm 1 \sigma$ uncertainties. From [Planck Collaboration XIII \(2015\)](#).



Natura stocastica della CMB: la varianza cosmica

Calcoliamo ora la varianza dell'estimatore appena definito:

$$\text{Var}\{\hat{C}_l\} = \langle \hat{C}_l^2 \rangle - \langle \hat{C}_l \rangle^2$$

↓ usando la def. dell'estimatore e il suo valore atteso

$$= \left\langle \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} \bar{a}_{lm} \frac{1}{2l+1} \sum_{m'=-l}^{+l} a_{lm'} \bar{a}_{lm'} \right\rangle - C_l^2$$

↓ separando i casi $m=m'$ e $m \neq m'$

$$= \frac{1}{(2l+1)^2} \left\{ \sum_{m=-l}^{+l} \langle a_{lm} \bar{a}_{lm} a_{lm} \bar{a}_{lm} \rangle + \sum_m \sum_{m' \neq m} \langle a_{lm} \bar{a}_{lm} a_{lm'} \bar{a}_{lm'} \rangle \right\} - C_l^2$$

molteplicità $2l+1$

molteplicità $(2l+1)2l$

per una gaussiana si ha, momento 4 = $\int dx x^4 f(x) = 3(\sigma^2)^2 = 1/n \sum x^4$

$$= \frac{1}{(2l+1)^2} \left\{ (2l+1) 3 C_l^2 + (2l+1) 2l C_l^2 \right\} - C_l^2$$

$$= \frac{1}{(2l+1)} \left\{ (2l+3) C_l^2 \right\} - C_l^2$$

$$= \frac{2}{(2l+1)} C_l^2 \quad \text{E' la varianza cosmica}$$



Significato della varianza cosmica

È un limite intrinseco alla precisione nella stima dello spettro di potenza, e di conseguenza dei parametri cosmologici, dovuto alla natura stocastica del problema. Osservando una sola realizzazione di Universo siamo limitati dalla funzione di distribuzione delle grandezze che andiamo a stimare. Anche un esperimento ideale è soggetto a questo limite.

Dal punto di vista statistico, la varianza cosmica ci dice che la variabile

$$(2l+1)\hat{C}_l/C_l$$

è descritta da una distribuzione chi-quadro con $(2l+1)$ gradi di libertà.

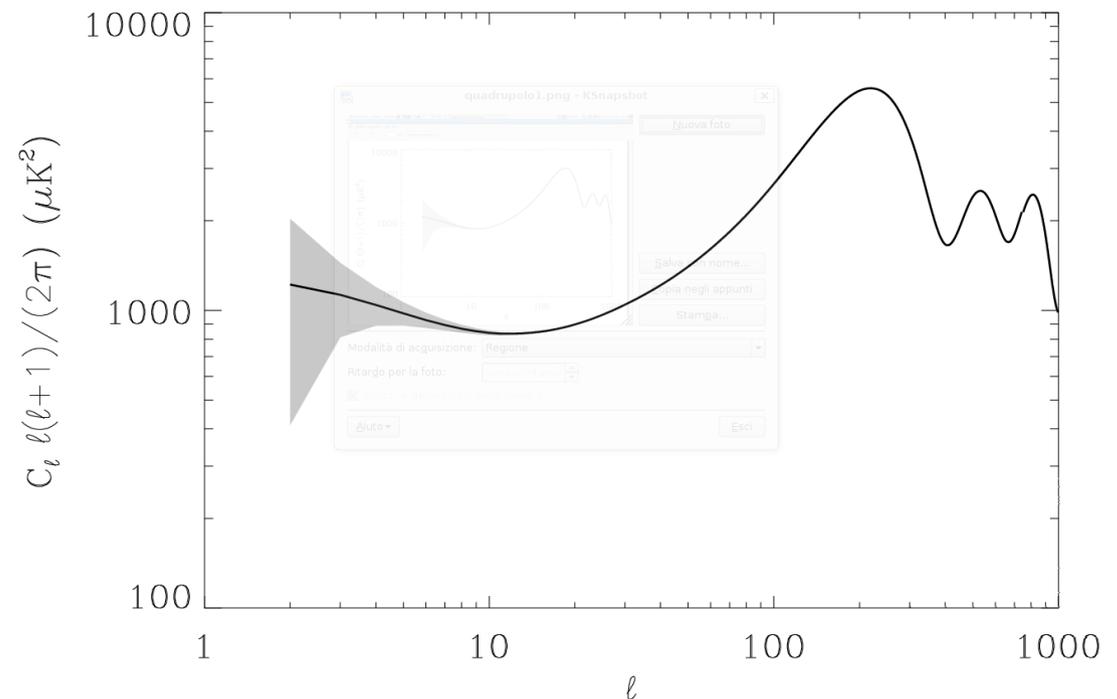
- La varianza del chi-quadro vale 2 volte il numero di gradi di libertà

Saremmo potuti giungere alla stessa conclusione con le seguenti considerazioni:

- se x è una variabile gaussiana, allora x^2/σ^2 è descritta da una distribuzione chi-quadro con 1 grado di libertà,
- identifichiamo $x=a_{lm}$, $\sigma^2=C_l$
- dalla definizione dello spettro si ha che per ogni valore di l sommiamo $(2l+1)$ variabili, ognuna descritta da chi-quadro con 1 grado di libertà.
 - Il quadrato di una gaussiana è un chi2 con 1 grado di libertà

Significato della varianza cosmica

- Lo spettro di potenza è definito come media d'ensemble del modulo al quadrato dei coefficienti a_{lm} . Avendo a disposizione una sola realizzazione di cielo non possiamo fare la media sull'ensemble, ma possiamo simularla assumendo l'isotropia e mediando per ogni l su tutti i valori possibili di m .
- Tanto più l è grande, tanti più valori di m potremo mediare e tanto più la media si avvicinerà a quella d'ensemble. Per questo motivo, la varianza cosmica decresce all'aumentare di l .





Effetto del rumore strumentale

Lo spettro di potenza viene calcolato partendo dalla mappatura delle anisotropie, ma per un esperimento reale nella mappa sarà presente anche il rumore strumentale. Sfruttando la linearità della trasformata in armoniche sferiche si ottiene:

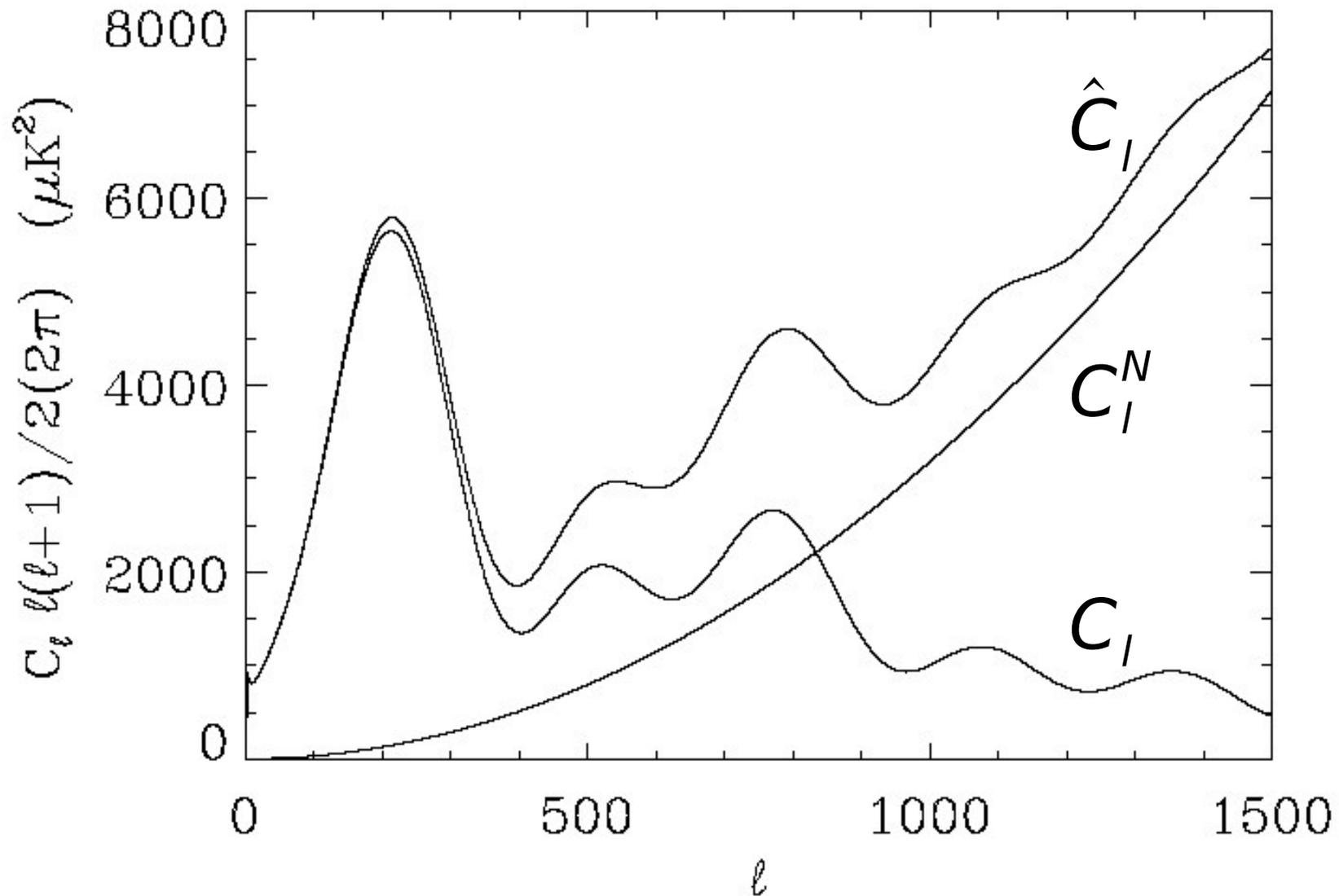
$$d_{lm} = \int_{4\pi} d\Omega d(\hat{n}) \bar{Y}_{lm} = \int_{4\pi} d\Omega \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) \bar{Y}_{lm} + \int_{4\pi} d\Omega n(\hat{n}) \bar{Y}_{lm} = a_{lm} + n_{lm}$$

ossia i coefficienti dello sviluppo in a.s. stimati in questo modo sono la somma di quelli del segnale e di quelli del rumore. Di conseguenza:

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_l \rangle &= \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} \langle d_{lm} \bar{d}_{lm} \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} \langle (a_{lm} + n_{lm})(\bar{a}_{lm} + \bar{n}_{lm}) \rangle \\ &= \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} \langle (a_{lm} \bar{a}_{lm} + n_{lm} \bar{n}_{lm} + a_{lm} \bar{n}_{lm} + n_{lm} \bar{a}_{lm}) \rangle \\ &= \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} (C_l + C_l^N) = C_l + C_l^N \end{aligned}$$

L'estimatore non è più *unbiased* e bisogna rimuovere il contributo del rumore. Una possibilità è ricavare C_l^N dalle proprietà dello strumento e sottrarlo nella stima. Un'altra è combinare dati da diversi rivelatori assumendo che il rumore sia scorrelato.

Effetto del rumore strumentale





Spettro di potenza del rumore

- Quanto vale lo spettro di potenza angolare del rumore nella mappa, N_{ℓ} ?
 - Supponiamo che il rumore dello strumento sia bianco, e che produca termine di rumore bianco nella mappa $N_{\ell} = \text{cost}$ (non dipende dal ℓ)
 - Supponiamo che nel cielo ci sia solo il rumore (no segnale)
 - Divido il cielo in n pixel
 - La deviazione standard in un pixel vale

$$\sigma_{pix}^2 = C(\theta = 0) = \frac{1}{4\pi} \sum N_{\ell}(2\ell + 1) = \frac{N_{\ell}}{4\pi} \sum (2\ell + 1)$$

- Se ho n pixel, il numero di dati indipendenti e' tale che posso stimare n coefficienti di armoniche sferiche indipendenti. Quindi posso stimare lo spettro di potenza fino a un ℓ tale che

$$\sum (2\ell + 1) = n$$

- Quindi se N_{ℓ} e' bianco (costante) allora posso dire

$$\sigma_{pix}^2 = \frac{N_{\ell}}{4\pi} n \quad \text{quindi} \quad N_{\ell} = \frac{4\pi}{n} \sigma_{pix}^2 = \Omega_{pix} \sigma_{pix}^2$$



Contributo del rumore allo spettro di potenza angolare

- A partire dalle caratteristiche dello strumento

$$N_\ell = \Omega_{pix} \sigma_{pix}^2$$

$$\sigma_{pix}^2 = NET^2 \frac{1}{NT_{pix}}$$

$$T_{pix} = \frac{T}{N_{pix}}$$

$$N_{pix} = \frac{4\pi f}{\Omega_{pix}}$$

$$T_{pix} = \frac{T\Omega_{pix}}{4\pi f}$$

$$\sigma_{pix}^2 = NET^2 \frac{4\pi f}{TN\Omega_{pix}}$$

$$N_\ell = NET^2 \frac{4\pi f}{TN}$$

Spettro di potenza del rumore.
Lo possiamo stimare e sottrarre. Quello che ci interessa è il suo contributo alla varianza



Effetto della risoluzione strumentale

- Un esperimento reale ha una risoluzione angolare finita, descritta da una funzione di risposta $B(\theta, \phi)$ o, nel caso di una risposta gaussiana, dalla FWHM.
- Quindi, osservando una direzione, lo strumento riceve da tutto il resto del cielo dei contributi che vengono pesati con la risposta angolare. In termini matematici si tratta di una convoluzione:

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \int_{4\pi} d\Omega' B(\theta' - \theta, \phi' - \phi) \frac{\Delta T}{T}(\theta', \phi')$$



Effetto della risoluzione strumentale

- Passando nello spazio armonico, in analogia con quanto avviene nello spazio di Fourier, l'integrale di convoluzione si riduce ad un prodotto:

$$d_{lm} = \int_{4\pi} d\Omega \int_{4\pi} d\Omega' B(\theta' - \theta, \phi' - \phi) \frac{\Delta T}{T}(\theta', \phi') \bar{Y}_{lm}(\theta, \phi) = b_{lm} a_{lm}$$

- dove b_{lm} sono i coefficienti dello sviluppo in armoniche sferiche della risposta angolare.
- Nel caso di risposta angolare Gaussiana
 - Window function in spazio di multipoli

$$B_\ell = b_{\ell m} = \exp[-0.5\ell(\ell + 1)\sigma^2]$$

$$\hat{C}_\ell = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} d_{\ell m} \bar{d}_{\ell m} = B_\ell^2 C_\ell$$



Rumore e risoluzione strumentale

- Varianza cosmica in assenza di rumore

$$\text{Var}(\hat{C}_\ell) = \frac{2}{2\ell + 1} C_\ell^2$$

- Dati in presenza di rumore e beam (risposta angolare)

$$d_{\ell,m} = a_{\ell,m} B_\ell + n_{\ell,m}$$

$$D_\ell = \langle d_{\ell,m} d_{\ell,m}^* \rangle_{ens} = C_\ell B_\ell^2 + N_\ell$$

- L'osservabile è $\hat{D}_\ell = \hat{C}_\ell B_\ell^2 + \hat{N}_\ell$

- Da cui poi ricaverò $\hat{C}_\ell = \frac{\hat{D}_\ell - \hat{N}_\ell}{B_\ell^2}$



Stima dell'errore nello spettro di potenza angolare

- A partire dalle caratteristiche dello strumento possiamo stimare:

$$N_\ell = NET^2 \frac{4\pi f}{TN}$$

spettro di potenza del rumore. Lo possiamo sottrarre allo spettro di potenza della mappa (segnale + rumore) Quello che ci interessa e' la varianza.

Senza rumore abbiamo ricavato

$$\text{Var}(\hat{C}_\ell) = \frac{2}{2\ell + 1} C_\ell^2$$

Con il rumore si ricava:

$$\text{Var}\{\hat{C}_\ell\} = \text{Var}\{\hat{D}_\ell/B_\ell^2\} = \frac{2}{(2\ell + 1)f} \left(\hat{C}_\ell + N_\ell/B_\ell^2\right)^2$$

[26] L. Knox, Phys. Rev. D **52**, 4307 (1995).

$$\Delta\hat{C}_\ell = \sqrt{\frac{2}{(2\ell + 1)f}} \left(\hat{C}_\ell + N_\ell/B_\ell^2\right)$$

Planck Collaboration: The *Planck* mission

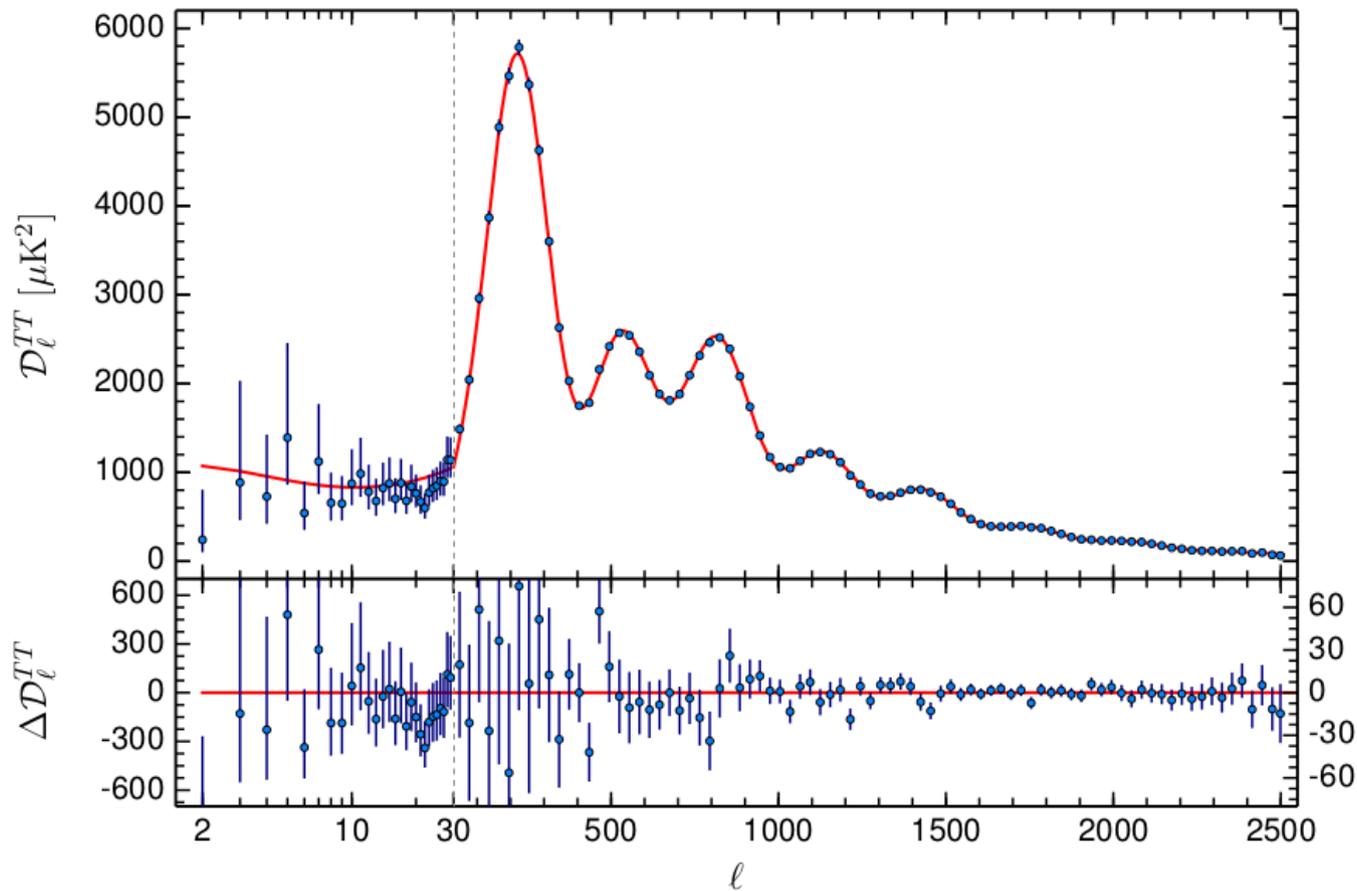


Fig. 9. The *Planck* 2015 temperature power spectrum. At multipoles $\ell \geq 30$ we show the maximum likelihood frequency averaged temperature spectrum computed from the *Planck* cross-half-mission likelihood with foreground and other nuisance parameters determined from the MCMC analysis of the base Λ CDM cosmology. In the multipole range $2 \leq \ell \leq 29$, we plot the power spectrum estimates from the *Commander* component-separation algorithm computed over 94 % of the sky. The best-fit base Λ CDM theoretical spectrum fitted to the *Planck* TT+lowP likelihood is plotted in the upper panel. Residuals with respect to this model are shown in the lower panel. The error bars show $\pm 1 \sigma$ uncertainties. From [Planck Collaboration XIII \(2015\)](http://adsabs.harvard.edu/abs/2015arXiv150201589P).

<http://adsabs.harvard.edu/abs/2015arXiv150201589P>

CMB Temperature

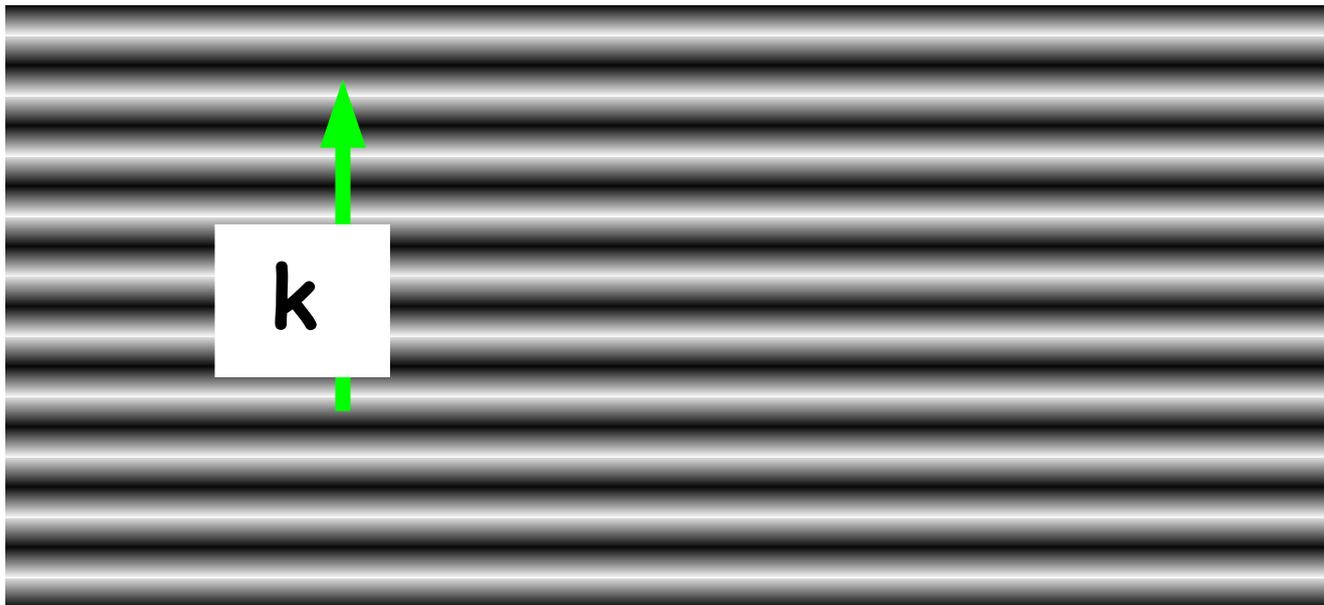
The primeval plasma can be described by

Density field (coupled to photons temperature)

Velocity field (related to density field by continuity equation)

The fields can be decomposed in Fourier space

Each k component can be treated independently from the others

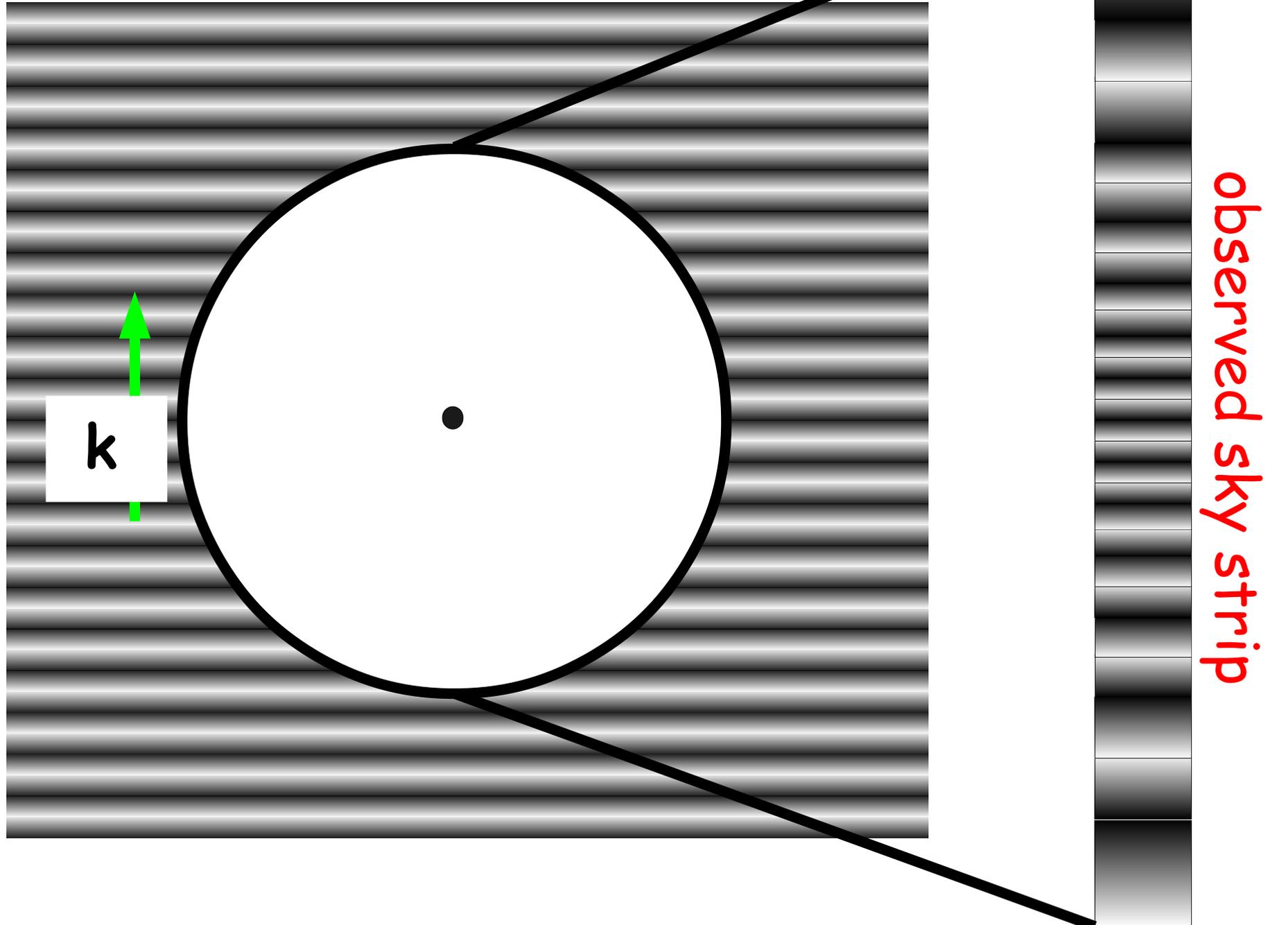


Single k mode

Fulfills the Universe

The amplitude evolves
as a harmonic oscillator

CMB Temperature



Origin of CMB Polarization

In the plasma, matter and radiation are tightly coupled by

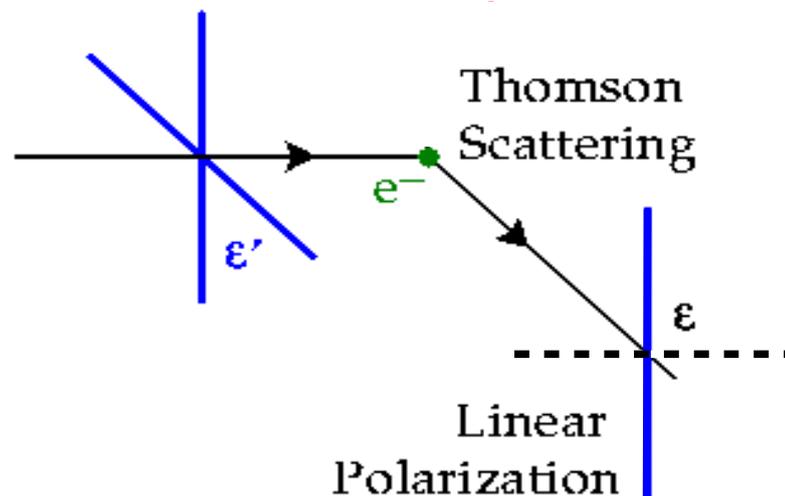
Thomson scattering

Thompson scattering in the plasma

originates linear polarization

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\epsilon' \cdot \epsilon|$$

Thomson scattering cross section





Polarizzazione della CMB modi E e modi B

The Stokes parameters of the CMB are function of the direction in the sky, \hat{n} , and two directions perpendicular to \hat{n} that are used to define Q and U , (\hat{e}_1, \hat{e}_2) , that correspond to spherical coordinate system $(\hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$. While the intensity I is invariant under rotation in the (\hat{e}_1, \hat{e}_2) plane, Q and U transform under a rotation of an angle ψ as

$$\begin{aligned}(Q + iU)'(\hat{n}) &= e^{-2i\psi} (Q + iU)(\hat{n}) \\ (Q - iU)'(\hat{n}) &= e^{+2i\psi} (Q - iU)(\hat{n})\end{aligned}\tag{1.80}$$

The quantities $Q \pm iU$ are named spin-2. The statistical properties of the radiation field are usually described in terms the spherical harmonic decomposition of the maps. This basis is very natural because the statistical properties of anisotropy are rotationally invariant. The standard spherical harmonics are not the appropriate basis for $Q \pm iU$ because they are spin-2 variables, but a generalization exists, the spin weighted basis [112], ${}_{\pm 2}Y_{lm}$, that is used to expand $Q \pm iU$ as

$$\begin{aligned}(Q + iU)(\hat{n}) &= \sum_{l,m} a_{+2,lm} {}_{+2}Y_{lm}(\hat{n}) \\ (Q - iU)(\hat{n}) &= \sum_{l,m} a_{-2,lm} {}_{-2}Y_{lm}(\hat{n})\end{aligned}\tag{1.81}$$

where the relation $a_{-2,lm}^* = a_{2,l-m}$ must be satisfied.



Polarizzazione della CMB modi E e modi B

Instead of $a_{\pm 2,lm}$ it is convenient to introduce their linear combination

$$\begin{aligned} a_{E,lm} &= -\frac{1}{2}(a_{2,lm} + a_{-2,lm}) \\ a_{B,lm} &= \frac{1}{2}i(a_{2,lm} - a_{-2,lm}) \end{aligned} \quad (1.82)$$

and define

$$\begin{aligned} E(\hat{n}) &= \sum_{l,m} a_{E,lm} Y_{lm}(\hat{n}) \\ B(\hat{n}) &= \sum_{l,m} a_{B,lm} Y_{lm}(\hat{n}) \end{aligned} \quad (1.83)$$

E and B completely specify the linear polarization field.

$E(\hat{n})$ and $B(\hat{n})$, like the temperature field $T(\hat{n})$, are invariant under rotation. Under parity, however, E and B behave differently, E remains unchanged, while B changes sign. In figure 1.6 are represented patterns of linear polarization that produce values of E and B different from 0 in the center of the pattern (\times symbol).

Polarizzazione della CMB modi E e modi B

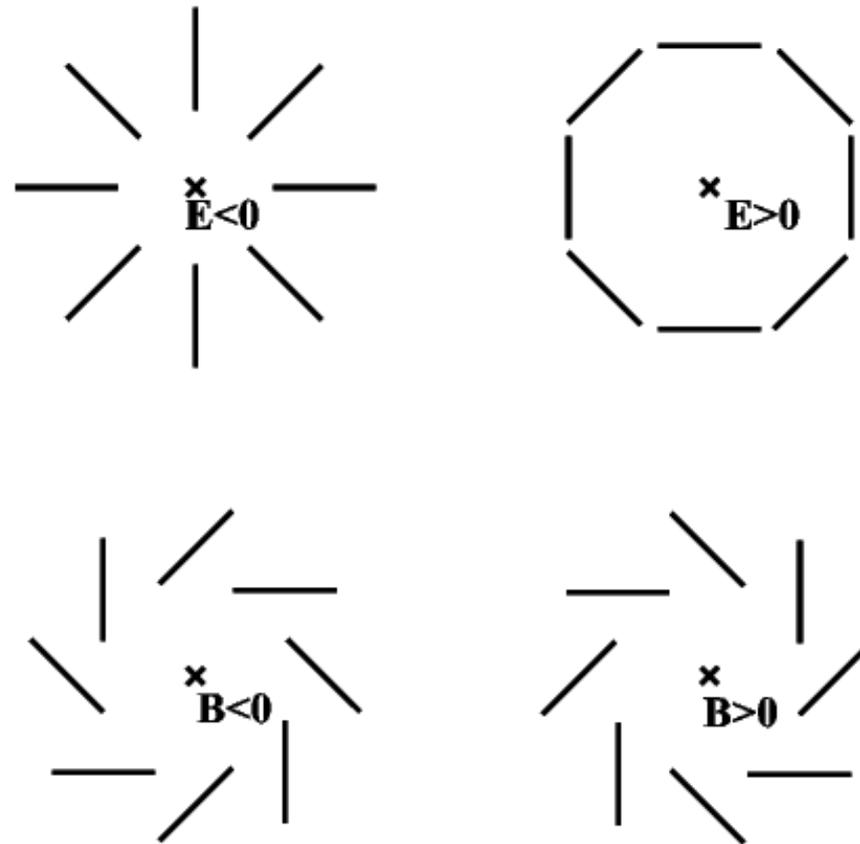


Figure 1.6: E -type and B -type patterns of linear polarization. The cross in the center of each pattern is the direction in which E and B are computed. Note that to go from a pattern to the other is just matter of a rotation of each rod.



Polarizzazione della CMB modi E e modi B

$E(\hat{n})$ and $B(\hat{n})$, like the temperature field $T(\hat{n})$, are invariant under rotation. Under parity, however, E and B behave differently, E remains unchanged, while B changes sign. In figure 1.6 are represented patterns of linear polarization that produce values of E and B different from 0 in the center of the pattern (\times symbol).

Using the symmetry consideration of previous section, we can state that gravitational waves can produce E and B -mode polarization, while density perturbation can produce only E -mode polarization. B -modes in the CMB polarization can be generated only by gravitational waves.

It is important to stress that whether a polarization field has an E or B component in a certain direction \hat{n} , it is a property of the pattern of polarization around that direction and not in the direction itself. E and B are non-local quantities. More details on (Q, U) to (E, B) transformation are in [110] and [12].



Polarizzazione della CMB modi E e modi B

We have three sets of multipole moments, $a_{T,lm}$, $a_{E,lm}$ and $a_{B,lm}$, which describe the temperature/polarization map of the CMB.

Angular power spectra and cross-spectra

$$\langle a_{T,lm}^* a_{T,l'm'} \rangle = C_\ell^T \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (1.84)$$

$$\langle a_{E,lm}^* a_{E,l'm'} \rangle = C_\ell^E \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (1.85)$$

$$\langle a_{B,lm}^* a_{B,l'm'} \rangle = C_\ell^B \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (1.86)$$

$$\langle a_{T,lm}^* a_{E,l'm'} \rangle = C_\ell^{TE} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (1.87)$$

where the brackets denotes *ideal* ensemble averages.



Polarizzazione della CMB modi E e modi B

The best estimators of the power spectra that we can make from a full sky map is averaging over all the values of m for each ℓ :

$$\widehat{C}_\ell^T = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{T,\ell m}^* a_{T,\ell m} \quad (1.88)$$

$$\widehat{C}_\ell^E = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{E,\ell m}^* a_{E,\ell m} \quad (1.89)$$

$$\widehat{C}_\ell^B = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{B,\ell m}^* a_{B,\ell m} \quad (1.90)$$

$$\widehat{C}_\ell^{TE} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{T,\ell m}^* a_{E,\ell m} \quad (1.91)$$



Stima dell'errore nello spettro di potenza angolare

- Estimatori

- Per temperatura, nel caso di rumore, avevamo $\hat{C}_\ell = \frac{\hat{D}_\ell - \hat{N}_\ell}{B_\ell^2}$

The estimator for the temperature power spectrum is [26],

$$\hat{C}_{Tl} = \left[\sum_m \frac{|a_{T,lm}|^2}{2l+1} - w_T^{-1} \right] e^{l^2 \sigma_b^2} \quad (41)$$

Indicato con N_{ell}
in slide precedenti

Similarly for polarization and cross correlation the optimal estimators are given by [14]

$$\begin{aligned} \hat{C}_{El} &= \left[\sum_m \frac{|a_{E,lm}|^2}{2l+1} - w_P^{-1} \right] e^{l^2 \sigma_b^2} \\ \hat{C}_{Bl} &= \left[\sum_m \frac{|a_{B,lm}|^2}{2l+1} - w_P^{-1} \right] e^{l^2 \sigma_b^2} \\ \hat{C}_{Cl} &= \left[\sum_m \frac{(a_{E,lm}^* a_{T,lm} + a_{E,lm} a_{T,lm}^*)}{2(2l+1)} \right] e^{l^2 \sigma_b^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Equivalente per la
polarizzazione



Stima dell'errore nello spettro di potenza angolare

- Covarianza (in analogia al rumore in presenza di beam e rumore)

The covariance matrix between the different estimators, $\text{Cov}(\hat{X}\hat{X}') = \langle (\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle)(\hat{X}' - \langle \hat{X}' \rangle) \rangle$ is easily calculated using equation (40). The diagonal terms are given by

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{C}_{Tl}^2) &= \frac{2}{2l+1} (\hat{C}_{Tl} + w_T^{-1} e^{l^2 \sigma_b^2})^2 & \text{Var}\{\hat{C}_\ell\} = \text{Var}\{\hat{D}_\ell/B_\ell^2\} &= \frac{2}{(2l+1)f} \left(\hat{C}_\ell + N_\ell/B_\ell^2 \right)^2 \\ \text{Cov}(\hat{C}_{El}^2) &= \frac{2}{2l+1} (\hat{C}_{El} + w_P^{-1} e^{l^2 \sigma_b^2})^2 \\ \text{Cov}(\hat{C}_{Bl}^2) &= \frac{2}{2l+1} (\hat{C}_{Bl} + w_P^{-1} e^{l^2 \sigma_b^2})^2 \\ \text{Cov}(\hat{C}_{Cl}^2) &= \frac{1}{2l+1} \left[\hat{C}_{Cl}^2 + (\hat{C}_{Tl} + w_T^{-1} e^{l^2 \sigma_b^2})(\hat{C}_{El} + w_P^{-1} e^{l^2 \sigma_b^2}) \right].\end{aligned}\quad (43)$$

The non-zero off diagonal terms are

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{C}_{Tl}\hat{C}_{El}) &= \frac{2}{2l+1} \hat{C}_{Cl}^2 \\ \text{Cov}(\hat{C}_{Tl}\hat{C}_{Cl}) &= \frac{2}{2l+1} \hat{C}_{Cl} (\hat{C}_{Tl} + w_T^{-1} e^{l^2 \sigma_b^2}) \\ \text{Cov}(\hat{C}_{El}\hat{C}_{Cl}) &= \frac{2}{2l+1} \hat{C}_{Cl} (\hat{C}_{El} + w_P^{-1} e^{l^2 \sigma_b^2}).\end{aligned}\quad (44)$$

Zaldarriaga Seljak, Phys. Rev. D 55, 1830–1840 (1997)

Planck 2015 – TE – EE power spectra

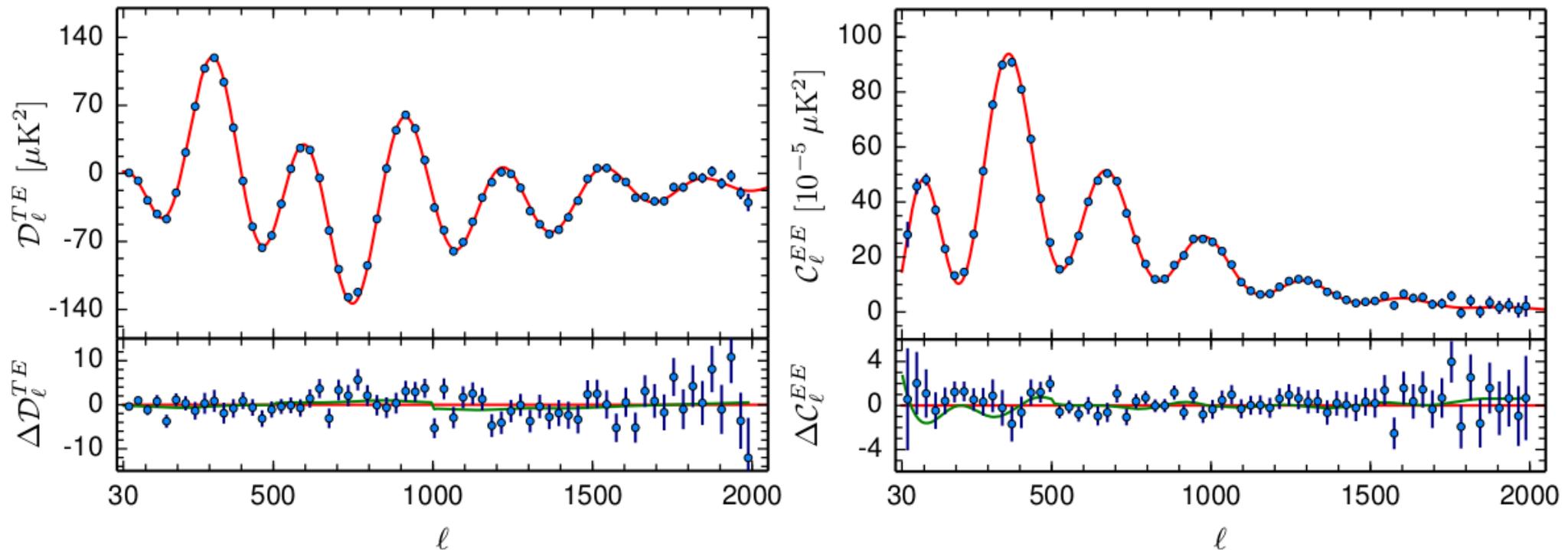
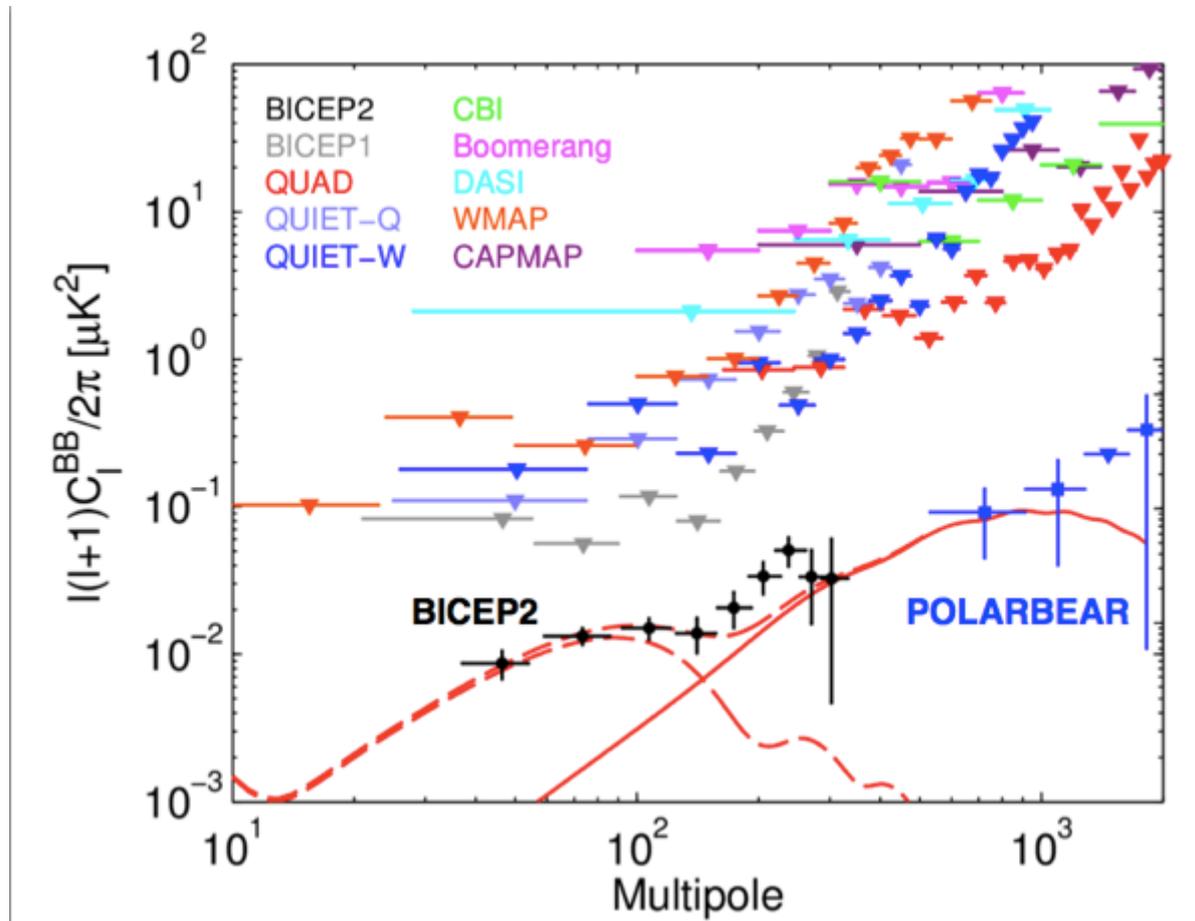


Fig. 10. Frequency-averaged *TE* (left) and *EE* (right) spectra (without fitting for *T–P* leakage). The theoretical *TE* and *EE* spectra plotted in the upper panel of each plot are computed from the best-fit model of Fig. 9. Residuals with respect to this theoretical model are shown in the lower panel in each plot. The error bars show $\pm 1\sigma$ errors. The green lines in the lower panels show the best-fit temperature-to-polarization leakage model, fitted separately to the *TE* and *EE* spectra. From [Planck Collaboration XIII \(2015\)](#).

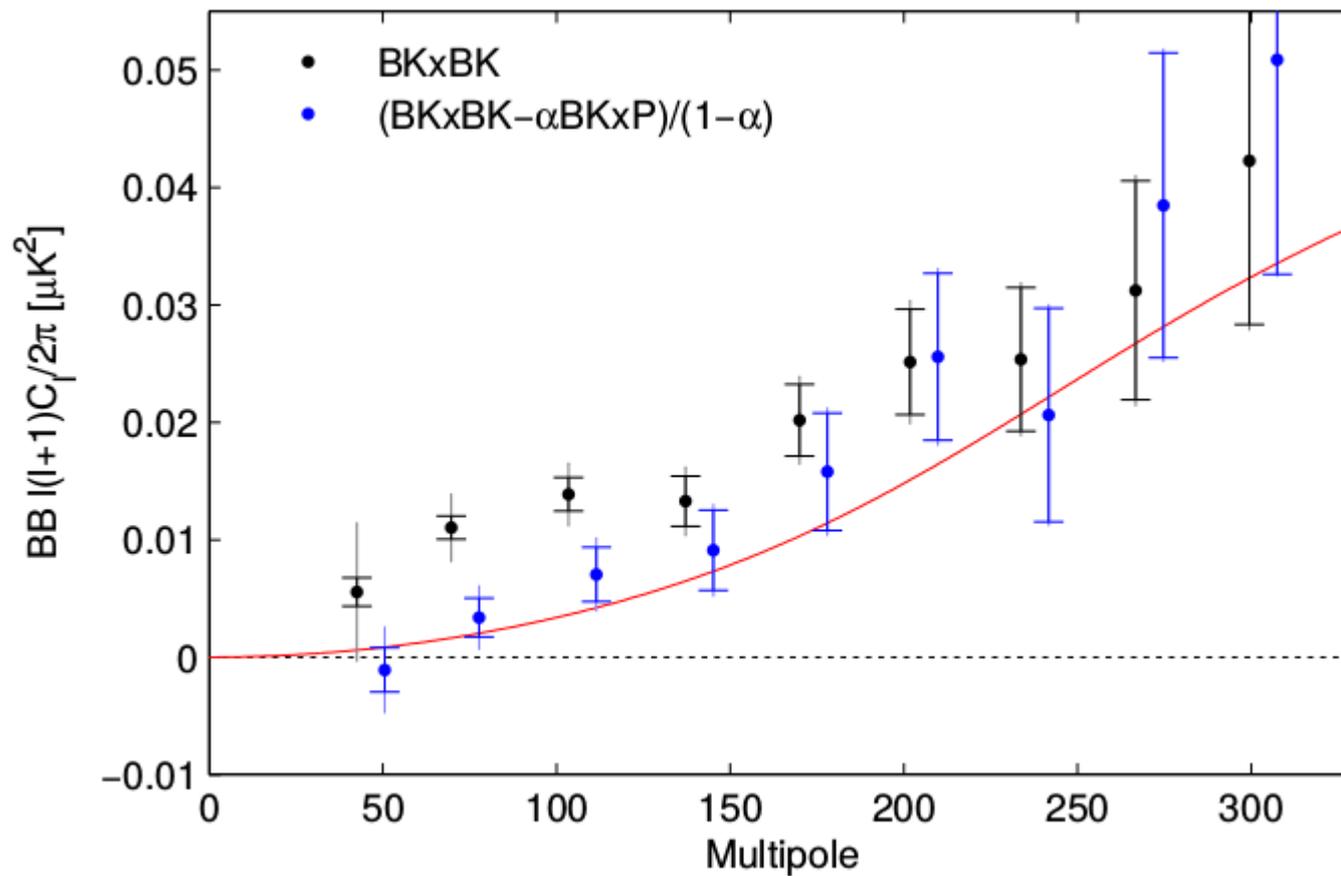
<http://adsabs.harvard.edu/abs/2015arXiv150201589P>

BB power spectrum data collection





BB power spectrum, after Planck dust subtraction



<http://adsabs.harvard.edu/abs/2015PhRvL.114j1301A>