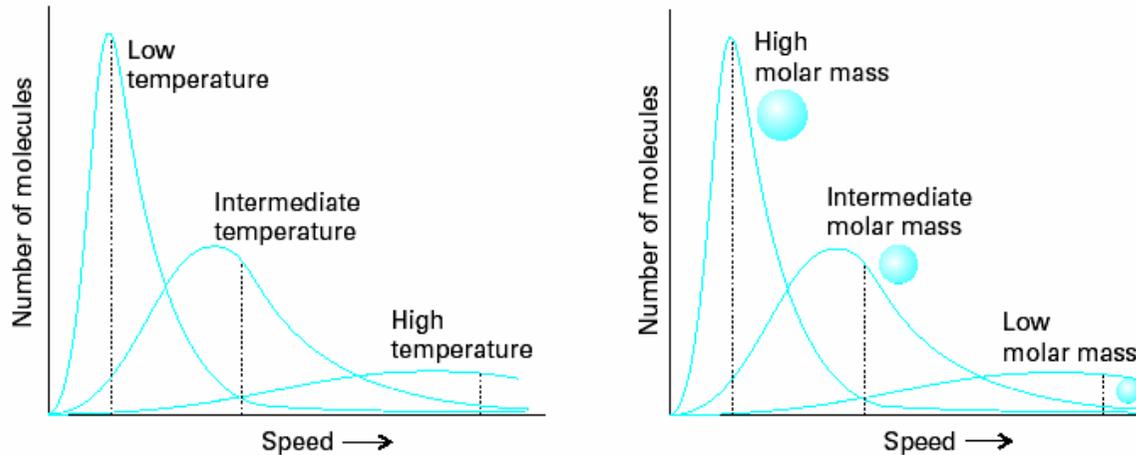


**Termodinamica e laboratorio**  
**A.A. 2009-2010**  
**III - Fenomeni di trasporto**

# La distribuzione di Maxwell

(dimostrabile teoricamente, verificabile sperimentalmente)

$$\frac{dN(v)}{dv} = F(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \Rightarrow dN(v) = F(v)dv$$



- $dN(v)$  include  $\exp(-v^2)$ : il numero di molecole con alta velocità è piccolo.
- $mv^2/2kT$  cresce con  $m$ : l'esponenziale diminuisce velocemente con  $m$ , le molecole con una massa grande non hanno velocità alte.
- Più' alta è la temperatura, più grande è il numero di molecole con alta velocità
- Il fattore  $v^2$  evidenzia che  $F(v)$  va a zero quando  $v$  è zero: in numero di molecole con bassa velocità è basso.

## La velocità più probabile ( $v_{mp}$ )

$$\frac{dN(v)}{dv} = F(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

Alla velocità più probabile la derivata di  $F(v)$  rispetto a  $v$  deve essere nulla

$$\frac{dF(v)}{dv} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 = \frac{d}{dv} \left( e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \right)$$

$$= 2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} + v^2 \left( -\frac{2mv}{2kT} \right) e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0$$

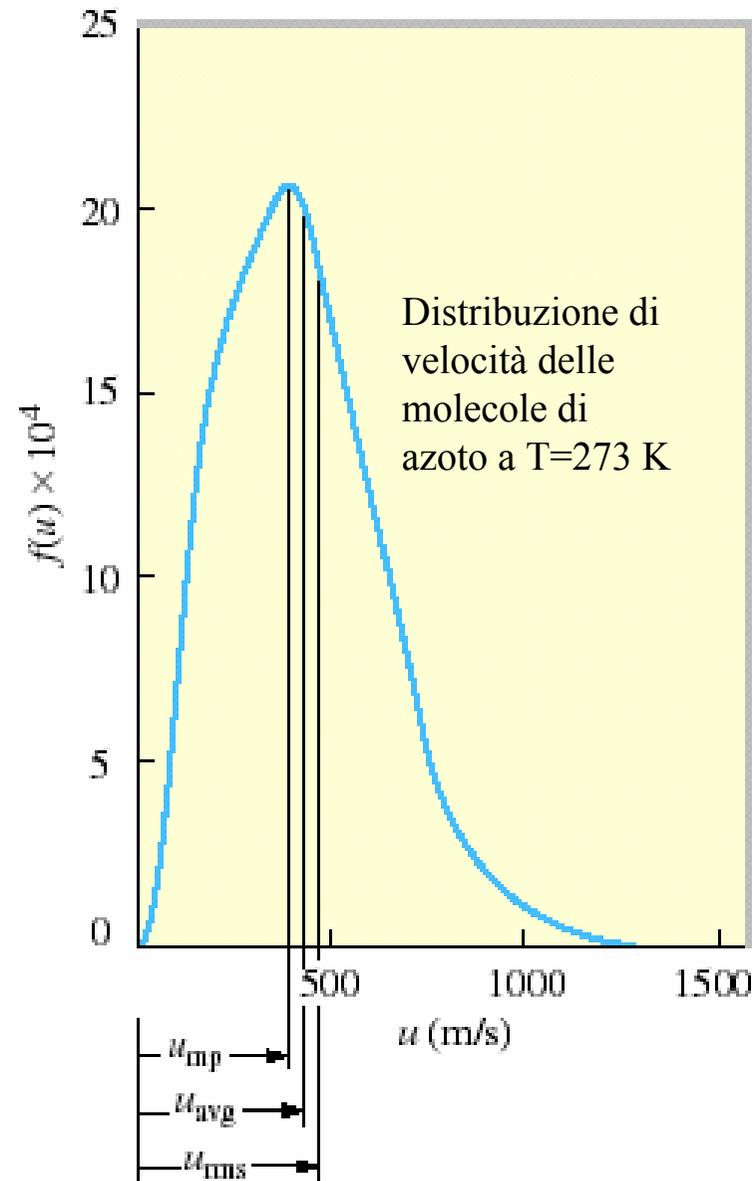
$$= 2v + v^2 \left( -\frac{mv}{kT} \right) = 0$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2kT}{m} \Rightarrow v_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Le tre velocità caratteristiche sono:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}; \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}; v_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

N.B.  $v_{mp} : \langle v \rangle : v_{rms} = 1.000 : 1.128 : 1.225$



## Effusione e Diffusione

Considero il gas chiuso in un contenitore, a temperatura T.

In una parete del contenitore viene praticato un foro microscopico.

**Effusione:** fuoriuscita del gas attraverso fori microscopici  
(fuga delle molecole attraverso fori sottili).

**Legge di Graham dell'effusione** (ricavata sperimentalmente): l'effusione nell'unità di tempo è proporzionale a  $1/\sqrt{M}$ , dove M è la massa molare del gas.

Coerentemente, la teoria cinetica dei gas predice che l'effusione per unità di tempo dipende dalla velocità media delle particelle:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Nel contenitore vengono immessi gas di diverse molecole.

**Diffusione:** processo con il quale le molecole di sostanza diverse tendono a mescolarsi. Il processo di diffusione inizia quando le molecole di sostanze diverse entrano in contatto.

## Urti molecolari

Calcolo: quante molecole urtano contro le pareti per unità di tempo e per unità di area.

(N.B. stesso procedimento usato per calcolare la pressione, ma si calcola il numero di urti invece della quantità di moto)

Numero di molecole che hanno velocità fra  $v_x$  e  $v_x + dv_x$ , che in  $\Delta t$  vanno a collidere su una superficie  $A$  della parete (perpendicolare ad  $x$ ) e' dato da:  $(N/V) A v_x \Delta t f(v_x) dv_x$

Il numero degli urti si ottiene integrando:

$$\frac{N}{V} A \Delta t \int_0^{\infty} v_x f(v_x) dv_x = \frac{N}{V} A \Delta t \frac{\langle |v_x| \rangle}{2}$$

Per unità' di tempo e per unità di area:  $\frac{1}{2} \frac{N}{V} \langle |v_x| \rangle$

Sapendo che  $2\langle |v_x| \rangle = \langle |v| \rangle$  (in 1D,  $\langle v_x \rangle = 0$ , ma  $\langle |v_x| \rangle = \langle |v| \rangle / 2$ ) . Quindi:  $z_w = \frac{1}{4} \frac{N}{V} \langle v \rangle$

Possiamo determinare il numero  $N_e$  di molecole escono nel tempo  $t$  attraverso un foro di sezione  $A$  :  $z_w A t = (1/4) (N/V) \langle v \rangle A t$

$$\text{Sapendo che } \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \Rightarrow N_e = \frac{1}{4} \frac{P}{kT} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} A t$$

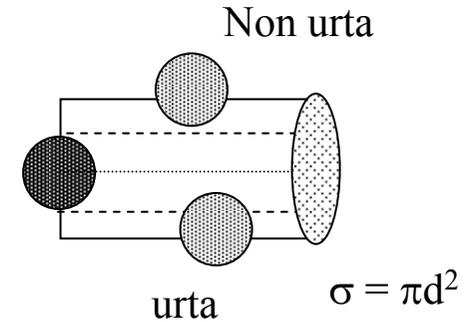
N.B. si considera gas perfetto:  $PV = nRT$  (con  $n$ : numero moli) =  $n N_A k T = N k T$ .

Con  $n = N/V =$  densità del gas, si ha  $P/kT = n$

# Cammino libero medio

## Finora molecole puntiformi.

Consideriamo ora molecole con dimensione finita che possono urtare tra di loro. Consideriamo che una molecola sia una sfera rigida di diametro  $d$  (raggio  $d/2$ ), dunque le molecole non potranno avvicinarsi più di  $d$ .



**Sezione d'urto**  $\sigma = \pi d^2$ . La molecola viaggia attraverso un gas con una velocità media  $\langle v \rangle$ .

La molecola “spazzerà” un volume  $\pi d^2 \langle v \rangle$  al secondo. Qualsiasi altra molecola in questo volume subirà una collisione con la molecola data.

Il numero di urti al secondo per unità di volume con le altre particelle è  $z = (N/V) \pi d^2 \langle v \rangle$ .

Per tener conto del fatto che tutte le particelle si muovono, si utilizza la velocità media relativa.

$$\text{Quindi } z = (N/V) \pi d^2 \langle v_{rel} \rangle.$$

$\langle v_{rel} \rangle$  si ricava considerando l'equazione della velocità media e la massa ridotta :  $(1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2) \Rightarrow \mu = m/2$

$$\langle v_{rel} \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} = \sqrt{2} \langle v \rangle \Rightarrow z = \frac{N}{V} \sqrt{2} \langle v \rangle \pi d^2$$

$z$  : numero di urti per unità di tempo della molecola con le altre

**Cammino libero medio**  $\lambda$ : distanza media percorsa da una molecola tra due urti successivi,

$$\lambda = \langle v \rangle / z$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\pi \sqrt{2} (N/V) d^2} = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma} = \frac{kT}{\sqrt{2} \sigma P}$$

$\lambda$  determinato da:

densità di molecole  $n = N/V$ , sezione d'urto  $\sigma$ ,  $T$   
(gas perfetto:  $P = nkT$ )

N.B. Se le molecole fossero puntiformi ( $d=0$ ),  $\lambda$  sarebbe infinito.

## Fenomeni di trasporto - Il flusso

Flusso di una generica grandezza: quantità che attraversa per unità di tempo una sezione di superficie unitaria. (Il flusso è definibile per ogni campo vettoriale)

$$\text{flusso} = \frac{\text{Quantità che fluisce } (\parallel \mathbf{x})}{(\text{Intervallo } t) (\text{Area } (\perp \mathbf{x}))}$$

Se la grandezza e' la massa: flusso di massa ( $\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$ ); Se la grandezza e' l'energia: flusso d'energia ( $\text{J m}^{-2}\text{s}^{-1}$ ). Il flusso di una certa grandezza e' proporzionale al gradiente di una grandezza associata ("potenziale": analogia con flusso di carica associato al gradiente del potenziale elettrico).

- il flusso di materia lungo la direzione x e' proporzionale al gradiente della densità lungo x

$$J_x(\text{materia}) \propto \frac{d(N/V)}{dx} \quad \boxed{\text{Legge di Fick}} \quad J_x(\text{materia}) = -D \frac{dn}{dx}$$

**Definizione: D : coefficiente di diffusione**

- il flusso di energia (termica) lungo x e' proporzionale al gradiente della temperatura lungo x

$$J_x(\text{energia}) \propto \frac{dT}{dx} \quad \boxed{\text{Legge di Fourier}} \quad J_x(\text{energia}) = -k \frac{dT}{dx}$$

**Definizione: k : conducibilità termica**

-flusso lungo z della quantità di moto lungo x e' proporzionale al gradiente di velocità lungo z.

$$J_z(mv_x) \propto \frac{dv_x}{dz} \quad \boxed{\text{Legge di Newton}} \quad J_z(mv_x) = \eta \frac{dv_x}{dz}$$

**Definizione: η : coefficiente di viscosità**

## Flusso della quantità di moto

Si analizza il moto di un fluido (o gas) suddividendolo in tanti strati (idrodinamica: moto laminare).

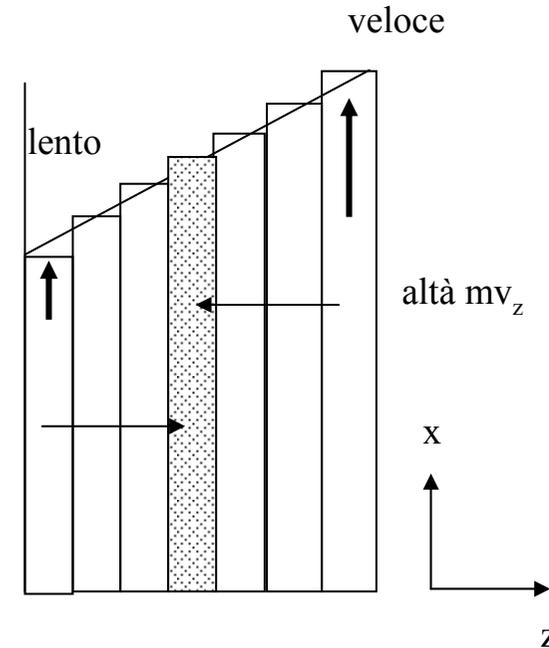
lo strato superiore si muove con una certa velocità, andando verso il fondo la velocità diminuisce (z : quota , x : verso del moto).

Le molecole si muovono continuamente (tra gli strati), ognuna con una certa quantità di moto (maggiore negli strati veloci, minore negli strati lenti), e si urtano fra di loro ⇒ scambi lungo z di quantità di moto,

flusso lungo z di quantità di moto.

Gli strati veloci tendono a rallentare, quelli lenti ad accelerare.

Il flusso lungo z della quantità di moto lungo x e' definito da:



Alto->basso: trasferimento positivo  
basso->alto : trasferimento negativo

**Legge di Newton**

$$J_z(mv_x) = \eta \frac{dv_x}{dz}$$

$\eta$  è il **coefficiente di viscosità** del fluido

# Fenomeni di trasporto (schema)

Normalmente (in termod) si considera lo stato iniziale e lo stato finale di equilibrio, non il processo di transizione.

Il fenomeno di trasporto è caratteristico di un sistema fuori dall'equilibrio (P, T etc. non sono costanti).

Il sistema raggiunge lo stato di equilibrio tramite trasporto di energia, di massa, di quantità di moto (dal punto di vista microscopico, il meccanismo di trasporto è legato con il moto delle molecole del sistema)

- Casi considerati:
- flusso di massa quando esiste un gradiente di densità.
  - flusso di calore (energia termica) quando esiste un gradiente di temperatura
  - flusso della quantità di moto quando esiste un gradiente di velocità.

=> C'è una grandezza caratteristica, il “**potenziale**”, il cui gradiente determina il flusso.

(analogia con il caso della corrente elettrica, determinata da un gradiente di (differenza di) potenziale elettrico.

Direzione del flusso: nel verso in cui il “potenziale” (velocità, temperatura, densità) diminuisce.

(p.e. Se il flusso di calore  $J_x > 0$  (flusso verso x crescenti), significa che la temperatura diminuisce verso la x crescente).

Grandezza		“Potenziale”	Coefficiente di trasporto (grandezza macroscopica che caratterizza il fenomeno di trasporto)
Carica	Grandezza fluisce quando c'è un gradiente di “potenziale”	Potenziale $dV/dx$	$\sigma_e$ (conducibilità elettrica)
Quantità di moto		Velocità $dv/dx$	$\eta$ (viscosità)
Energia (termica)		Temperatura $dT/dx$	$k$ (conducibilità termica)
Massa		Densità $d(N/V)/dx$	$D$ Coefficiente di diffusione

## Esempio: conducibilità termica (trasporto di calore) (definizione operativa)

$$\text{Legge di Fourier: } J_x(\text{energia}) \propto \frac{dT}{dx} \implies J_x(\text{energia}) = -k \frac{dT}{dx}$$

### In calorimetria:

Una lastra di materiale ha la faccia **1** a contatto con una sorgente calda a  $T_1$ , l'altra faccia **2** a contatto con una sorgente a  $T_2 < T_1$ .

Flusso di calore =  $J_x(Q) = Q/(t S)$  = quantità di calore che, per unità di superficie e di tempo, passa dalla faccia **1** alla **2** (perpendicolari alla direzione x).

La propagazione del calore avviene secondo la legge:

$$J_x(Q) = \kappa (T_1 - T_2) / d$$

(d = spessore della lastra,  $\kappa$  = **conducibilità termica** = Cal K<sup>-1</sup> sec<sup>-1</sup>m<sup>-1</sup>)

In forma differenziale:

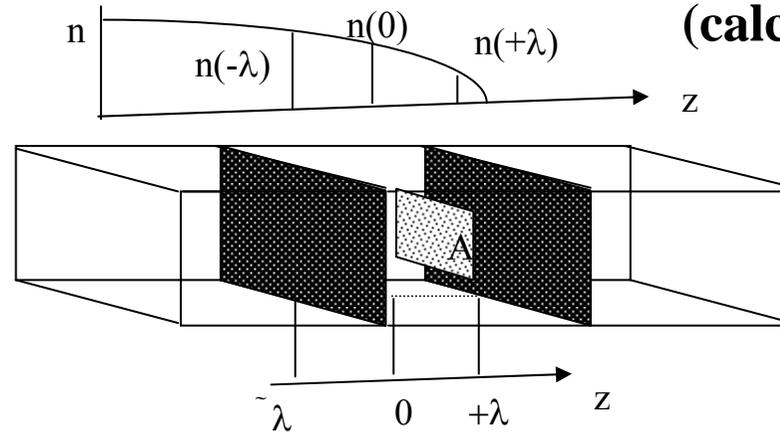
$$J_x(Q) = -\kappa dT/dx$$

N.B. due facce ad x e x+dx, a temperature T e T+dT.

il calore fluisce dalla più calda alla più fredda --> segno -

## Esempio: coefficiente di diffusione (trasporto di materia)

(calcolo nel caso di gas perfetto)



A : ipotetica superficie

(N.B.: flusso unidimensionale)

Le molecole che attraversano la sezione A sono quelle che si trovano entro  $|\lambda|$  da A.  
Data la presenza di un gradiente di densità, la densità di molecole a  $z=-\lambda$  e' data da:  
(sviluppo in serie al primo ordine)

$$n(-\lambda) = n(0) - \lambda \left( \frac{dn}{dz} \right)_0$$

Il numero di molecole che attraversano l'unita' di superficie (A) per unita' di tempo:

$$z_w = \frac{1}{4} \frac{N}{V} \langle v \rangle \Rightarrow z_w = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$$

Quindi il flusso di molecole attraverso A provenienti da  $-\lambda$  (da sinistra S a destra D) e':

$$J(S \rightarrow D) = \frac{1}{4} n(-\lambda) \langle v \rangle$$

Nello stesso modo si può scrivere il flusso nel verso opposto

$$J(D \rightarrow S) = \frac{1}{4} n(+\lambda) \langle v \rangle \quad \text{dove} \quad n(+\lambda) = n(0) + \lambda \left( \frac{dn}{dz} \right)_0$$

Il flusso risultante è

$$J(S \rightarrow D) - J(D \rightarrow S) = \left\{ \left[ n(0) - \lambda \left( \frac{dn}{dz} \right)_0 \right] - \left[ n(0) + \lambda \left( \frac{dn}{dz} \right)_0 \right] \right\} \langle v \rangle = -\frac{1}{2} \lambda \langle v \rangle \left( \frac{dn}{dz} \right)_0$$

Dalla **legge di Fick**  $J_x(\text{materia}) = -D \frac{dn}{dx} \Rightarrow D = \frac{1}{2} \lambda \langle v \rangle$

Abbiamo ignorato il fatto che il problema è tridimensionale, che bisognerebbe tener conto di tutte le molecole comprese fra A e  $|\lambda|$ , che le molecole possono subire collisioni prima di attraversare A. Di conseguenza, il flusso delle molecole che attraversano A sarà minore rispetto a quello descritto. Sapendo che la distanza media delle molecole da una superficie è  $2/3 \lambda$  (v. pag. 25), si ottiene:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \quad \text{con} \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

## Definizioni del coefficiente di diffusione

Il coefficiente di diffusione  $D$  ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ) di un gas e'

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle$$

Utilizzando  $\langle v \rangle$

$$D = \frac{1}{3} \lambda \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Utilizzando  $\langle \lambda \rangle$

$$D = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (\text{con } n=N/V)$$

Utilizzando  $P=nkT$

$$n=P/kT$$

$$D = \frac{4}{3} \frac{1}{P} \frac{1}{\pi d^2} \frac{(kT)^{3/2}}{\sqrt{\pi m}}$$

Quando la pressione aumenta,  $\lambda$  diminuisce, quindi il coefficiente  $D$  diminuisce e il gas diffonde più lentamente. Con la temperatura  $\lambda$  aumenta ciò significa che la diffusione nel campione sarà molto più veloce rispetto ad un campione freddo.

( $D$  è grande per le molecole piccole, per queste la diffusione sarà molto veloce).

## Applicazione: pompaggio del gas in un contenitore

N.B. **Effusione:** il gas nel contenitore a  $P > P_{\text{ambiente}}$  fuoriesce da un foro

**Pompaggio:** una pompa da vuoto collegata ad un foro del contenitore estrae il gas (qualunque sia la sua pressione) dal contenitore, fino a praticare il vuoto nel contenitore stesso. (Estrazione nella direzione x)

$$\text{Legge di Fick: } J_x = \frac{dN}{dt dS} = -D \frac{dn}{dx} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -D \frac{dn}{dx} dS$$

Gas perfetto,  $T = \text{cost}$  (aria a  $T_{\text{ambiente}}$  ben approssimabile a gas perfetto)

$$\text{Da } PV = NkT \Rightarrow P = nkT \Rightarrow dn = \frac{dP}{kT} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -\frac{D}{kT} \frac{dP}{dx} dS$$

Il processo di pompaggio ( $\Rightarrow$  estrazione dal contenitore di  $N$  molecole nell'unità di tempo) e' "governato" dal **gradiente di pressione** (nella direzione x) creato dalla pompa.

---

Una pompa da vuoto e' contraddistinta dalla **velocita' di pompaggio** che esprime la portata volumetrica  $W$  ( $\text{m}^3/\text{sec}$ ) attraverso la "bocca" di ingresso della pompa.

**Portata di volume (volumetrica)  $\Sigma$  (o  $W$ ) =  $dV/dt$  (N.B.  $[W] = \text{m}^3/\text{sec}$ ) :**

**elemento di volume che attraversa il condotto nell'unita' di tempo**

In idrodinamica, considerando un liquido, la **Portata di materia** (massa) e la **Portata di volume** sono equivalenti: differiscono per la densita' (che in un liquido e' circa costante).

N.B. nel gas la densita'  $n$  **non** e' costante

Nel processo di pompaggio, si definisce la  
**Portata (di massa) Q** della pompa da vuoto:

$$Q = \frac{d(PV)}{dt} = \frac{d(NkT)}{dt} = kT \frac{dN}{dt} \quad ([Q]: \text{Pa m}^3/\text{sec}) : \text{atm lt /sec})$$

N.B. Q e' proporzionale alla quantità di gas che attraversa l'ingresso della pompa nell'unità di tempo (dN/dt).

- N.B. - la temperatura T e' costante durante il processo
- il gas viene trattato come gas perfetto (bassa pressione)
  - $NkT \Leftrightarrow$  energia (termica) trasportata dalle molecole del gas

Se considero un elemento di volume dV alla pressione P:

$$Q = \frac{d(PV)}{dt} = P \frac{dV}{dt} = PW$$

**Ad una certa pressione, la portata di massa Q e'  
la portata volumetrica per la pressione.**

**La velocità di pompaggio (portata volumetrica attraverso la “bocca” di ingresso della pompa) nominale  $W$  (costante, data dal costruttore) e' diversa da quella effettiva  $W_{\text{eff}}$**

**→ Misura della velocità di pompaggio  $W_{\text{eff}}$  (Esperienza 5)**

Considero l'andamento nel tempo della pressione di un recipiente di volume  $V$ , quando ad esso è connessa una pompa avente una velocità di pompaggio nominale  $W$  (o  $\Sigma$ ) costante.

Gas contenuto nel recipiente in condizioni isoterme, segue la legge dei gas perfetti. So che:

$$Q = kT \frac{dN}{dt} = \frac{d(NkT)}{dt} = \frac{d(PV)}{dt}, \quad W = \frac{dV}{dt}, \quad Q = P W$$

N.B.  $d(PV) / dt = P dV/dt + V dP / dt = V dP / dt$  poiché' il gas occupa sempre il volume  $V$  del recipiente in qualunque momento del pompaggio.

N.B. in  $dt$ , un dato numero di molecole di gas ( $dN$ ) abbandona il recipiente, lo stesso numero di molecole ( $dN_p$ ) entra nella pompa di portata  $Q$  alla pressione  $P$  (ovviamente  $dN_p = -dN$ )

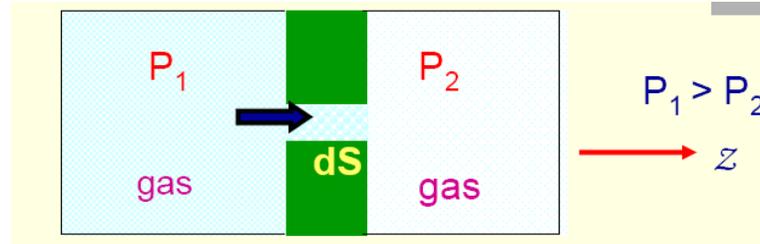
$$Q = P W_{\text{eff}} = kT \frac{dN_p}{dt} = -kT \frac{dN}{dt} = -\frac{d(PV)}{dt} = -V \frac{dP}{dt}$$

$$\Rightarrow P W_{\text{eff}} = -V \frac{dP}{dt} \Rightarrow P(t) = P(0) e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{V}{W_{\text{eff}}}$$

- N.B.  $\tau$  : **tempo caratteristico di svuotamento** cresce linearmente con il volume  $V$
- Dato un volume  $V$ , misurando  $P$  vs  $T$ , si ricava  $\tau(V)$
- Ripetendo la misura di  $\tau$  per diversi  $V$ , si ricava  $W_{\text{eff}}$

## Conduttanza

- Consideriamo un gas che si trova in due regioni di spazio distinte con pressioni  $P_1$  e  $P_2$ , con  $P_1$  maggiore di  $P_2$ . Le due regioni comunicano tramite un foro di sezione  $dS$ .



- La differenza di pressione fa sì che vi sia un passaggio netto di molecole dalla regione a pressione maggiore a quella a pressione minore.

- In condizioni di gas rarefatto il numero di molecole che diffondono per unità di tempo attraverso il foro è regolato dalla legge di Fick:

$$\left[ Q = \frac{d(NkT)}{dt} = \frac{d(PV)}{dt} \right] \quad kT \frac{dN}{dT} = Q = -D \frac{dP}{dz} dS$$

- Il gradiente di pressione  $dp/dz$  sarà proporzionale alla differenza di pressione  $P_1 - P_2$ :

$$\frac{dP}{dz} \propto (P_1 - P_2) \Rightarrow Q \propto D \cdot dS \cdot (P_1 - P_2) \Rightarrow Q = C \cdot (P_1 - P_2)$$

La costante  $C$  si chiama **conduttanza** e tiene conto della geometria del condotto (sezione del foro, lunghezza del condotto, etc...)  
e delle proprietà del gas, quali ad esempio  $D$ .

(solo a bassissima pressione ( $P < 1$  Pa),  $C$  dipende solo dalla geometria del condotto)

N.B.  $[Q] = [P][V][t^{-1}]$ ,  $[C] = [V][t^{-1}]$ ,  $[W] = [V][t^{-1}]$   
 $\Rightarrow W$  e  $C$  hanno le stesse dimensioni

N.B.  
Conduttanze in serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

## La viscosità-1

### CALCOLI NEL CASO GAS PERFETTO

Sono presenti delle forze interne di attrito che fanno in modo che il moto di ogni volume elementare non possa essere indipendente da quello degli altri. Ogni strato che si muove esercita sullo strato adiacente una forza tangente, questa forza tende a far diminuire la velocità dello strato che muove più veloce e tende ad aumentare quella dello strato che si muove più lentamente. Dalla legge di Newton la variazione della quantità di moto  $d(mv)/dt$  è proporzionale al gradiente di velocità e l'area della superficie

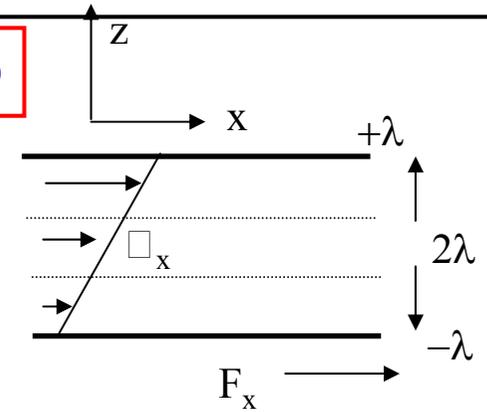
$$J_z(mv_x) = -\eta \frac{dv_x}{dz} \Rightarrow \frac{F_x}{A} = -\eta \frac{dv_x}{dz}$$

Questa è la legge di Newton della viscosità,  $\eta$  è il coefficiente di viscosità, si misura in Poise ( $\text{gm cm}^{-1}\text{s}^{-1}$ ).

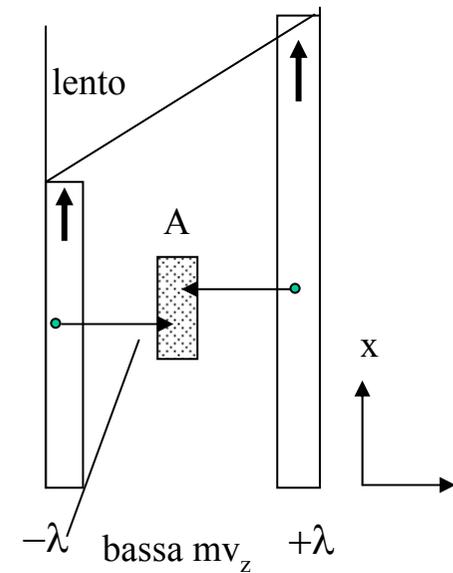
Assumendo che la densità sia uniforme, il numero di collisioni per unità di tempo per unità di sezione è  $1/4n\langle v \rangle$ .

La quantità di moto verso sinistra

$$mv_x(\lambda) = mv_x(0) + m\lambda \left( \frac{dv_x}{dz} \right)_0$$



$\square_x(-\lambda)$ -lento     $\square_x(+\lambda)$  veloce



## La viscosità-2

La quantità di moto verso destra  $mv_x(-\lambda) = mv_x(0) - m\lambda \left( \frac{dv_x}{dz} \right)_0$

Il flusso in z della quantità di moto lungo x

$$J_z = \frac{1}{4} \left\{ \left[ mv_x(0) - m\lambda \left( \frac{dv_x}{dz} \right)_0 \right] - \left[ mv_x(0) + m\lambda \left( \frac{dv_x}{dz} \right)_0 \right] \right\}$$

$$J_z = \frac{F_x}{A} = -\frac{1}{2} nm\lambda \langle v \rangle \left( \frac{dv_x}{dz} \right)_0$$

Dalla legge di Newton  $J_z(mv_x) = -\eta \frac{dv_x}{dz}$  si ottiene  $\eta = \frac{1}{2} nm\lambda \langle v \rangle$

utilizzando  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ ;  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}(N/V)\sigma}$  si ottiene  $\eta = \frac{2}{3} \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{mkT}{\pi}}$

Per un gas rarefatto (dove il cammino libero medio è molto maggiore rispetto alle dimensioni delle molecole), la viscosità non dipende dalla densità ma dipende dalla temperatura. A parità di temperatura non dipende ne anche dalla pressione del gas.

## Trasporto di calore-Conducibilità termica

Per la conduzione termica, il flusso di interesse è quello dell'energia. Le molecole portano energia,  $\langle E \rangle = \nu kT$  ( $\nu = 3/2$ ). Dobbiamo utilizzare lo stesso ragionamento fatto per il calcolo del coefficiente di diffusione  $D$ . Qui si parla del gradiente di temperatura. I flussi d'energia sono

$$J(S \rightarrow D) = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \cdot \langle E(-\lambda) \rangle \quad \langle E(-\lambda) \rangle = \nu k \left\{ T - \lambda \left( \frac{dT}{dz} \right)_0 \right\}$$

$$J(D \rightarrow S) = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \cdot \langle E(\lambda) \rangle \quad \langle E(\lambda) \rangle = \nu k \left\{ T + \lambda \left( \frac{dT}{dz} \right)_0 \right\}$$

Il flusso risultante è

$$J(S \rightarrow D) - J(D \rightarrow S) = -\frac{1}{2} n \lambda \langle v \rangle \nu k \left( \frac{dT}{dz} \right)$$

Dalla legge di Fourier  $J_x(\text{energia}) = -k \frac{dT}{dx}$   $k = \frac{1}{3} \nu \lambda n \langle v \rangle k$

Per un gas perfetto  $c_v = \nu N_A k$   $k = \frac{1}{3} m n \langle v \rangle \lambda c_v$

$$k = \eta c_v$$

$$D = \frac{\eta}{m n}$$

## Trasporto di calore attraverso una barra-1

La legge di Fourier per la conduzione è  $\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx}$

Nel caso di una barra isolata dall'ambiente, in regime stazionario, il gradiente di temperatura deve rimanere costante lungo la barra, cioè  $dT/dx = \text{costante}(-\gamma)$

$$dT = -\gamma dx \Rightarrow T(x) = T(0) - \gamma x \quad [x = 0 \rightarrow T(x) = T(0)]$$

$$\frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{q_x}{k.A} \Rightarrow \gamma = \frac{q_x}{k.A} \Rightarrow k = \frac{q_x}{\gamma A}$$

Nel caso in cui la barra non sia isolata dall'ambiente dobbiamo considerare il calore disperso nell'ambiente. La legge di Newton di convezione per una superficie di sezione A a temperatura T(x), la quantità di calore dispersa per unità di tempo

$$\frac{dQ}{dt} = hA(T(x) - T_A) \Rightarrow \frac{q_x}{A} = h(T(x) - T_A) \quad \left( \frac{dQ}{dt} = q_x \right)$$

h è il coefficiente di convezione ( $\text{Wm}^{-2}\text{s}^{-1}$ ). Nello stato stazionario, il calore disperso nell'ambiente deve essere uguale a quello fornito in modo tale che  $dT/dx$  sia costante.

## Trasporto di calore attraverso una barra-2

Consideriamo una sezione  $dx$  della barra, il calore entrante

$$\frac{dQ}{dt} = q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

Il calore uscente

$$q_{x+\delta x} = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\delta x}$$

Utilizzando il teorema binomiale si ha

$$q_{x+\delta x} = -kA \left( \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right)$$

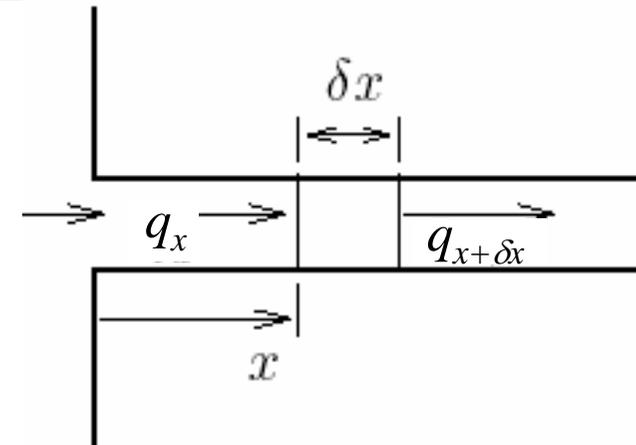
Il calore disperso

$$q_x = h(2(w+t)dx)(T_x - T_\infty)$$

Utilizzando la conservazione dell'energia, si ottiene

$$-kA \frac{dT}{dx} = -kA \left( \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) + hP(T_x - T_\infty) dx$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA} (T_x - T_\infty) = 0$$



$$\left[ \frac{dT}{dx} (x + \delta x) = \left[ \frac{dT}{dx} \right]_x + \left[ \frac{d^2T}{dx^2} \right]_x (\delta x) + \dots \right]$$

$A=2(\text{spessore} \cdot dx)$

$+2(\text{larghezza} \cdot dx)=P \cdot dx,$

$P=2(w+t)$  è perimetro

## Trasporto di calore attraverso una barra-3

Possiamo riscrivere la equazione  $\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{hP}{kA}\theta = 0$  dove  $(T_x - T_\infty) = \theta$

Condizione iniziale  $x=0, \theta=\theta_0 = (T_0 - T_\infty)$

Consideriamo che la barra sia infinitamente lunga, e non ci siano perdite dal lato estremo. In questo caso le condizioni di contorno

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow \theta = \theta_0 \\ x = \infty &\rightarrow \theta = 0 \end{aligned} \quad \text{e consideriamo} \quad m^2 = \frac{hP}{kA}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \Rightarrow \theta(x) = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$$

Applicando le condizioni  $\theta(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$  si ha  $\theta(x) = \theta_0 e^{-mx}$   
 $\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow C_1 = \theta_0$

$$T(x) - T_\infty = (T(0) - T_\infty) e^{-mx}$$

## Trasporto di calore attraverso una barra-4

L'equazione può essere scritta  $\frac{T(x) - T_\infty}{T(0) - T_\infty} = e^{-mx}$

Sapendo che  $m^2 = \frac{hP}{kA}$  si ha  $\frac{T(x) - T_\infty}{T(0) - T_\infty} = e^{-\sqrt{\frac{hP}{kA}}x}$

Nel caso in cui la base della barra sia un quadrato di lato  $a \Rightarrow P=4.a$ , e  $A=a^2$

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T(0) - T_\infty} = e^{-2\sqrt{\frac{h}{ka}}x}$$

Se la barra ha una lunghezza finita, (ma non ci siano perdite) la soluzione dell'equazione

$$\theta(x) = \theta_0 \left[ \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2ml}} + \frac{e^{mx}}{1 + e^{2ml}} \right] \quad \text{dove} \quad \left[ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{\cosh[m(l-x)]}{\cosh(ml)}$$

\*Se ci sono le perdite, si ha

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{\cosh[m(l-x)] + \frac{h}{km} \sinh[m(l-x)]}{\cosh(ml) + \frac{h}{km} \sinh(ml)}$$

## La distanza media da una superficie

La distanza media percorsa da una molecola prima di subire un urto è uguale al cammino libero medio ( $\lambda$ ). Ciò significa che tutte le molecole che si trovano su una superficie emisferica di raggio  $\lambda$ , attraverseranno la superficie A (con l'ipotesi che la superficie A sia piccola rispetto a  $\lambda$ ).

La densità di molecole che attraversano sarà  
proporzionale a  $dS \, dN_\theta = C A_\perp \cdot dS =$

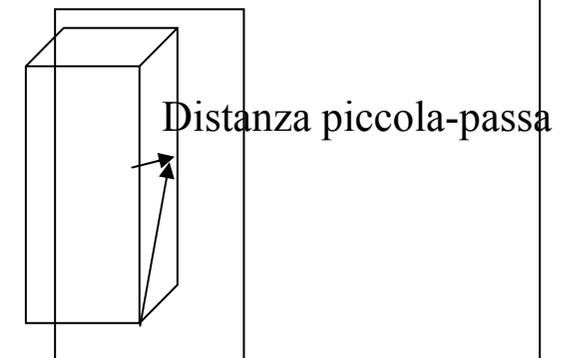
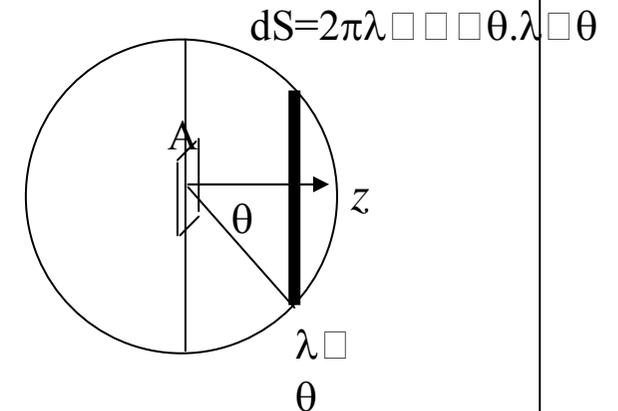
$$= C \cdot A \cos^2 \theta \, 2\pi \lambda^2 \sin \theta \, d\theta$$

La distanza media sarà

$$\langle z \rangle = \frac{\int_0^{\pi/2} z \, dN_\theta}{\int_0^{\pi/2} dN_\theta} = \frac{\int_0^{\pi/2} \lambda^2 \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \lambda \cos \theta \cdot \sin \theta \, d\theta}$$

Da qua si ottiene la distanza media da una superficie A

$$\langle z \rangle = \frac{2}{3} \lambda$$



Distanza maggiore-  
subisce collisione  
prima

## Applicazione: pompaggio del gas in un contenitore

N.B. **Effusione:** il gas nel contenitore a  $P > P_{\text{ambiente}}$  fuoriesce da un foro

**Pompaggio:** una pompa da vuoto collegata ad un foro del contenitore estrae il gas (qualunque sia la sua pressione) dal contenitore, fino a praticare il vuoto nel contenitore stesso. (Estrazione nella direzione x)

$$\text{Legge di Fick: } J_x = \frac{dN}{dt dS} = -D \frac{dn}{dx} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -D \frac{dn}{dx} dS$$

Gas perfetto,  $T = \text{cost}$  (aria a  $T_{\text{ambiente}}$  ben approssimabile a gas perfetto)

$$\text{Da } PV = NkT \Rightarrow P = nkT \Rightarrow dn = \frac{dP}{kT} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -\frac{D}{kT} \frac{dP}{dx} dS$$

Il processo di pompaggio ( $\Rightarrow$  estrazione dal contenitore di  $N$  molecole nell'unità di tempo) e' "governato" dal **gradiente di pressione** (nella direzione x) creato dalla pompa.

Nel processo di pompaggio, si definisce la **Portata Q** della pompa.

**Q** : quantità di gas che attraversa  $dS$  nell'unità di tempo (v. fluidodinamica)

$$Q = \frac{d(PV)}{dt} = \frac{d(NkT)}{dt} = kT \frac{dN}{dt} \quad ([Q]: \text{Pa m}^3/\text{sec}) : \text{atm lt /sec}$$

N.B. - la temperatura  $T$  e' costante durante il processo

- il gas viene trattato come gas perfetto (bassa pressione)

-  $NkT \Leftrightarrow$  energia (termica) trasportata dalle molecole del gas

**Portata di volume (volumetrica)  $\Sigma$  (o  $W$ ) =  $dV/dt$  (N.B.  $[W]=m^3/sec$ ) :**

**elemento di volume che attraversa il condotto nell'unita' di tempo**

In idrodinamica, considerando un liquido, la **Portata di materia** (massa) e la **Portata di volume** sono equivalenti: differiscono per la densita' (che in un liquido e' circa costante).

N.B. nel gas la densita' **non** e' costante

Se conosco  $P$ ,  $T=cost$  del gas (perfetto) nel  $dV$ :

$$PV = NkT \Rightarrow PdV = kTdN \Rightarrow P \frac{dV}{dt} = kT \frac{dN}{dt}$$

$$\text{Poiche' } Q = kT \frac{dN}{dt} \text{ e } W = \frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow Q = P W$$

**Ad una certa pressione, la portata di massa  $Q$  e' la portata volumetrica per la pressione.**

**Una pompa da vuoto e' contraddistinta dalla velocita' di pompaggio che esprime la portata volumetrica  $W$  ( $m^3/sec$ ) attraverso la "bocca" di ingresso della pompa.**