Modelli matematici per la fisica
Laurea di Scienze Matematiche per l'Intelligenza Artificiale (SMIA)
Raccolta di esercizi di esame del modulo di meccanica

Emanuele Caglioti

1 Primo esonero 11/2023

Un punto materiale di massa m si muove sulla retta $\mathbb{R}$ sotto l'azione di una forza di energia potenziale

$$U(x) = (3 + 2x)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

1. Si scrivano esplicitamente le equazioni del moto.
2. Si discuta la natura qualitativa delle orbite al variare dell'energia. In particolare si disegnino le orbite nello spazio delle fasi, specificando il numero di curve di fase su ciascun livello di energia E ed il tipo di moto corrispondente a ciascuna di esse.
3. Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile.

2 Secondo esonero 12/2023

Un punto materiale P di massa 1 si muove in $\mathbb{R}^3$ vincolato alla superficie

$$S = \{(x, y, z) : z = \frac{\rho^4}{4}\}$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sul punto agisce la forza di gravitÃ $g = 1$, diretta lungo l'asse z discendente e una forza di energia potenziale $-ax$.

Usando come coordinate lagrangiane le coordinate polari, $x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta$, si svolga **o la parte A o la parte B**.

2.1 Parte A

1. Si scriva la lagragiana del sistema.
2. Per $a = 0$ si trovino due integrali primi indipendenti.
3. Per $a = 0$ si trovi un dato iniziale che dia luogo ad un moto circolare uniforme.
4. Si calcoli il periodo del moto circolare uniforme trovato al punto precedente.

2.2 Parte B

1. Si scriva la lagragiana del sistema.
2. Al variare di $a > 0$ si trovino le posizioni di equilibrio del sistema (non si consideri il caso $\rho = 0$.
3. Si discuta la stabilitÃ delle posizioni di equilibrio trovate al punto precedente.
4. Per $a = 1$ si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni intorno a una posizione di equilibrio stabile.

3 Scritto 01/2024

Un punto materiale P di massa 1 si muove in $\mathbb{R}^3$ vincolato alla superficie

$$S = \{(x, y, z) : z = \frac{\rho^2}{2}\}$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sul punto agisce la forza di gravità $g = 1$, diretta lungo l'asse z discendente e una forza di energia potenziale $-ax - \log \rho$.

Usando come coordinate lagrangiane le coordinate polari, $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, si risponda alle seguenti domande.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema.
2. Al variare di $a > 0$ si trovino le posizioni di equilibrio del sistema (non si consideri il caso $\rho = 0$).
3. Si discuta la stabilità delle posizioni di equilibrio trovate al punto precedente.
4. Per $a = 1$ si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni intorno a una posizione di equilibrio stabile.
5. Per $a = 0$ si trovino due integrali primi indipendenti.
6. Per $a = 0$ si trovi un dato iniziale che dia luogo ad un moto circolare uniforme su di un cerchio di raggio $\rho = 2$.
7. Domanda facoltativa. Si determini l'insieme dei valori di ρ per i quali è possibile avere un moto circolare uniforme.

4 Scritto 02/2024

Un punto materiale P di massa 1 si muove in $\mathbb{R}^3$ vincolato alla superficie

$$S = \{(x, y, z) : z = -\rho\}$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sul punto agisce la forza di gravità, $g = 1$, e una forza di energia potenziale $x^2 + ay^2$, $0 < a \leq 1$.

Usando come coordinate lagrangiane le coordinate polari, $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, si risponda alle seguenti domande.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema.
2. Al variare di $a : \; 0 < a < 1$, si trovino le posizioni di equilibrio del sistema (non si consideri il caso $\rho = 0$).
3. Si discuta la stabilità delle posizioni di equilibrio trovate al punto precedente.
4. Per $a = \frac{1}{2}$ si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni intorno a una posizione di equilibrio stabile.
5. Per $a = 1$ si trovino due integrali primi indipendenti.
6. Per $a = 1$ si trovi un dato iniziale che dia luogo ad un moto circolare uniforme su di un cerchio di raggio $\rho = 2$.
7. Si determini l'insieme dei valori di ρ per i quali è possibile avere un moto circolare uniforme.

5 Scritto 07/2024

Un punto materiale di massa 1 si muove sulla retta $\mathbb{R}$ sotto l'azione di una forza di energia potenziale

$$U(x) = x^2 - x^4 + x^6$$

1. Si scrivano esplicitamente le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio.
3. Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile.
4. Si determini il limite del periodo dei moti periodici quando l'energia $E \to \infty$

6 Scritto 09/2024

Un punto materiale di massa 1 si muove sulla retta $\mathbb{R}$ sotto l'azione di una forza di energia potenziale

$$U(x) = 2x^2 e^{-x^2}$$

1. Si scrivano esplicitamente le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio.
3. Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile.
4. Si consideri, al variare di $u > 0$, la famiglia di dati iniziali $x_0 = 0, v_0 = u$. Si dica per quali valori di u il moto è illimitato.

7 Primo esonero 11/2024

Un punto materiale di massa 1 si muove in una dimensione sotto l'azione di una forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1 + x^4}{1 + x^2}$$

- Si scrivano esplicitamente le equazioni del moto.
- Si discuta la natura qualitativa delle orbite al variare dell'energia. In particolare si disegnino le orbite nello spazio delle fasi, specificando il numero di curve di fase su ciascun livello di energia ed il tipo di moto corrispondente a ciascuna di esse.
- Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni intorno a una posizione di equilibrio stabile.
- Dato $y > 1$, sia $T(y)$ il periodo dell'orbita periodica che ha estremi $x = -y$ e $x = y$. Si calcoli $\lim_{y \to \infty} T(y)$.