Meccanica Razionale (Caglioti)
Scritto aprile 2021

Esercizio

Un punto materiale P di massa 1 si muove in $\mathbf{R}^3$ vincolato alla superficie

$$z = -e^{-(x^2+y^2)}$$

Sul punto agisce la forza di gravità, $g = 1$, diretta lungo l'asse z discendente.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Si scriva la lagragiana del sistema in coordinate cartesiane
2. Si trovino le posizioni di equilibrio
3. Si determini la stabilità delle posizioni di equilibrio.
4. Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile.
5. Utilizzando le coordinate polari si esibisca un dato iniziale per il quale il punto si muove di moto circolare uniforme sul cerchio di raggio 1 e centro l'origine. Si calcoli il periodo di questa orbita.

Meccanica Razionale (Caglioti) - II esonero

1 Esercizio

Un punto materiale P di massa 1 si muove in $\mathbf{R}^3$ sulla superficie

$$S = \left\{ (x, y, z) : z = \arctan\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \right\}.$$

Il punto è soggetto alla forza di gravità, $g = 1$ e ad una forza di energia potenziale $V = a\,x$, $a \geq 0$.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema, esprimendo le variabili (x, y) in coordinate polari;

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \\ y &= \rho \sin\theta \end{aligned}$$

2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema al variare del parametro $a > 0$, escludendo il punto $\rho = 0$ dall'analisi.

3. Si determini la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro a, escludendo il punto $\rho = 0$ dall'analisi.

4. Per $a = 0$ si determinino due integrali primi del sistema.

5. Per $a = 0$ si esibisca un dato iniziale per il quale il punto materiale si muove di moto circolare uniforme su di un cerchio di raggio R.

6. Per $a = 0$ si consideri il dato iniziale $\rho = 2, \dot{\rho} = v, \theta = 0, \dot{\theta} = 1$.

   • Si determini per quali valori di $v > 0$ il moto è illimitato.

   • Per $v = 2$ si determini se il punto materiale, nella sua traiettoria, compie infiniti giri intorno all'origine oppure no.

Meccanica Razionale (Caglioti)
I scritto settembre 2021

1 Esercizio 1

Un punto materiale P di massa 1 si muove in $\mathbf{R}^3$ sulla superficie di rotazione

$$S = \left\{(x, y, z) : \rho = 1 + z^2\right\},$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Il punto è soggetto ad una forza esterna di energia potenziale $V = \rho$.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema, utilizzando come coordinate z e l'angolo polare θ,

$$\begin{aligned} x &= (1 + z^2) \cos \theta \\ y &= (1 + z^2) \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

2. Si determinino due integrali primi del sistema.
3. Al variare di $R > 1$ si esibisca un dato iniziale per il quale il punto materiale si muove di moto circolare uniforme su di un cerchio di raggio R.
4. Si dimostri che non esistono orbite illimitate.

2 Esercizio 2

Si consideri una lamina piana ellittica omogenea di massa M e semiassi $a = 1$ e b, dove b è dato da: somma delle cifre del numero di matricola modulo 5 più 2.

Si calcoli il momento d'inerzia della lamina rispetto al centro dell'ellisse.

Suggerimento: utilizzare le coordinate polari.

Nota: Quanto richiesto è equivalente a calcolare il momento d'inerzia della lamina (giacente sul piano orizzontale xy) rispetto all'asse parallelo all'asse z, passante per il suo centro.

Meccanica Razionale (Caglioti)
scritto gennaio 2022

1 Esercizio 1

Un punto materiale P di massa 1 si muove in $\mathbf{R}^3$ sulla superficie

$$S = \left\{(x, y, z) : \rho = 1 + z^2 + az\cos(\theta)\right\},$$

dove $0 < a < 1$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e θ è l'angolo polare.

Il punto è soggetto ad una forza di energia potenziale $V = \rho$.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema, utilizzando come coordinate z e l'angolo polare θ,

$$\begin{aligned} x &= \left(1 + z^2 + az\cos(\theta)\right)\cos\theta \\ y &= \left(1 + z^2 + az\cos(\theta)\right)\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

2. Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne determini la stabilità al variare del parametro a.

3. Per $a = \frac{1}{2}$ si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4. Per a = 0 si trovino due integrali primi indipendenti del sistema.

5. Per $a \in (0, 1)$ si dimostri che non esistono orbite illimitate.

2 Esercizio 2

Si consideri, sul piano, una corona circolare omogenea $C = \left\{(x, y) : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 1\right\}$ di massa M. Si calcoli il momento d'inerzia della corona rispetto all'origine[1].

[1] problema equivalente a calcolare il momento d'inerzia della corona circolare (giacente sul piano orizzontale xy) rispetto all'asse parallelo all'asse z, passante per il suo centro.

3 Svolgimento Esercizio 1

1. La lagrangiana L è data da $L = T - V$. L'energia cinetica T è

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

In coordinate polari $\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2$. Da $\rho = 1+z^2+az\cos(\theta)$ troviamo $\dot{\rho} = (2z + a\cos\theta)\dot{z} - az\sin\theta\dot{\theta}$ e quindi

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2 = ((2z+a\cos\theta)\dot{z}-az\sin\theta\dot{\theta})^2+(1+z^2+az\cos(\theta))^2\dot{\theta}^2$$

Quindi

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}\left[(2z + a\cos\theta)\dot{z} - az\sin\theta\dot{\theta})^2 + (1 + z^2 + az\cos(\theta))^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right]$$

Il potenziale $V = \rho = 1 + z^2 + az\cos(\theta)$.

2. Nei punti di equilibrio $\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$.

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -az\sin\theta = 0 \iff \theta = 0 \text{ o } \theta = \pi \text{ o } z = 0$$

Sostituendo in $\frac{\partial V}{\partial z} = 2z + a\cos\theta$ troviamo:
per $\theta = 0 : 2z + a = 0$, cioè $z = -\frac{a}{2}$;
per $\theta = \pi : 2z - a = 0$, cioè $z = \frac{a}{2}$;
per $z = 0 : a\cos\theta = 0$, cioè $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3}{2}\pi$.
Ci sono quindi 4 posizioni di equilibrio:
$(\zeta_1, \theta_1) = (-\frac{a}{2}, 0)$; $(\zeta_2, \theta_2) = (\frac{a}{2}, \pi)$; $(\zeta_3, \theta_3) = (0, \frac{\pi}{2})$; $(\zeta_4, \theta_4) = (0, \frac{3}{2}\pi)$.
Per la stabilità dobbiamo calcolare l'hessiano di V.

$$D^2V = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\theta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta & -az\cos\theta \end{bmatrix}$$

Notiamo subito che per le posizioni 3 e 4 si ha $cos(\theta) = 0$ e $\sin\theta \neq 0$: Quindi il determinante è negativo e il punto è instabile. Per le posizioni 1 e 2 invece la matrice è diagonale (infatti $\sin\theta = 0$) e quindi gli autovalori sono gli elementi della diagonale. L'elemento 1,1 è 2, quindi è positivo. L'elemento 2,2 è $-az\cos\theta$ che in entrambi i casi è uguale a $\frac{a^2}{2} > 0$. Quindi i due punti sono stabili.

3. Per $a = \frac{1}{2}$ studiamo le piccole oscillazioni intorno alla posizione $(z_1, \theta_1) = (-\frac{a}{2}, 0)$. Come visto sopra

$$D^2V = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{2} \end{bmatrix}$$

Per calcolare la matrice dell'energia cinetica conviene prima scrivere l'energia cinetica nel punto (z_1, θ_1), cioè l'energia cinetica delle piccole oscillazioni.

$$T_{po} = \frac{1}{2}\left[((2z+a)\dot{z})^2 + (1+z^2+az)^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right] = \frac{1}{2}\left[\dot{z}^2 + (1-a^2/4)^2\dot{\theta}^2\right]$$

dove nel primo passaggio abbiamo sostituito il valore di $\theta = 0$ e nel secondo il valore di $z = -a/2$.

Quindi, la matrice dell'energia cinetica A è definita da

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T_{po}}{\partial \dot{z}^2} & \frac{\partial^2 T_{po}}{\partial \dot{z}\partial\dot{\theta}} \\ \frac{\partial^2 T_{po}}{\partial \dot{z}\partial\dot{\theta}} & \frac{\partial^2 T_{po}}{\partial \dot{\theta}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\frac{a^2}{4} \end{bmatrix}$$

Quindi risolvendo $det[D^V - \lambda A] = 0$ (le matrici sono diagonali, quindi basta fare il rapporto dei termini corrispondenti nelle due matrici) troviamo $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = \frac{a^2}{2-\frac{a^2}{2}}$.

Le corrispondenti frequenze sono $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{2}$, $\omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \frac{a}{\sqrt{2-\frac{a^2}{2}}}$.

4. Per $a = 0$ il sistema è invariante per rotazione e la lagrangiana non dipende da θ. In particolare

$$L = \frac{1}{2}\left[(1+4z^2)\dot{z}^2 + (1+z^2)\dot{\theta}^2\right] - (1+z^2)$$

Quindi si conserva

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (1+z^2)\dot{\theta}.$$

Inoltre, dato che la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo si conserva l'energia

$$E = T + V = \frac{1}{2}\left[(1+4z^2)\dot{z}^2 + (1+z^2)\dot{\theta}^2\right] + (1+z^2)$$

5. Per dimostrare che non esistono orbite illimitate basta notare che il potenziale V è limitato dal basso e che $V \to \infty$ per $|z| \to \infty$.

Entrambe queste proprietà sono dovute al fatto che il termine z^2 nel potenziale domina gli altri termini per $|z| \to \infty$.

Il fatto che V sia limitato dal basso implica che la velocità non può divergere. Il fatto che V vada all'infinito per $|z| \to \infty$ ci assicura che z sia limitato in termini dell'energia del dato iniziale. Si può poi infine notare che ρ è una funzione continua di z e quindi non diverge se non diverge z.

4 Svolgimento Esercizio 2

Possiamo notare che il momento d'inerzia della corona circolare è uguale al momento d'inerzia dell'intero cerchio di raggio 1 meno il momento d'inerzia del cerchio di raggio $\frac{1}{2}$. La massa del disco di raggio 1 pieno è $M_1 = \frac{M}{3/4} = \frac{4}{3}M$, mentre la massa del cerchio di raggio $\frac{1}{2}$ è $M_2 = \frac{1}{3}M$.

Chiamiamo $R_1 = 1$ il raggio del disco grande e $R_2 = \frac{1}{4}$ il raggio del disco piccolo.

Allora, essendo il momento d'inerzia di un disco di raggio r e massa m rispetto al centro dato da $I_r = \frac{1}{2}mr^2$, troviamo che il momento d'inerzia della corona circolare è

$$I_C = \frac{1}{2}M_1R_1^2 - \frac{1}{2}M_2R_2^2 = \frac{1}{2}\frac{4}{3}M - \frac{1}{2}\frac{1}{3}M\frac{1}{4} = \frac{2}{3}\frac{15}{16}M = \frac{5}{8}M$$

Meccanica Razionale (Caglioti)
Scritto 26 aprile 2023

26 aprile 2023

Esercizio 1.

Un punto materiale P di massa 1 si muove in $\mathbf{R}^3$ vincolato alla superficie $z = (x^2 + y^2)^2$. Sul punto agisce la forza di gravità, $g = 1$ e una forza di energia potenziale $U = \frac{ax^2+y^2}{2}$, $a \in \mathbf{R}$.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema nelle coordinate cartesiane x e y.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio al variare di a.
3. Si determini la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di a.
4. Per $a = -1$ si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile.
5. Per $a = 1$, utilizzando le coordinate polari, si trovino due integrali primi del sistema.
6. Sempre per $a = 1$, si esibisca un dato iniziale che dia luogo ad un moto circolare uniforme e se ne calcoli il periodo T.
7. Sempre per $a = 1$ e chiamato J il momento della quantità di moto del moto circolare uniforme calcolato al punto precedente, si considerino i moti radiali per quel valore di J al variare dell'energia. In particolare si calcoli il periodo τ delle piccole oscillazioni del moto radiale intorno al moto radiale trovato al punto precedente.
8. (Facoltativo) Confrontando i valori di T e τ trovati precedentemente, eventualmente per diversi valori di J, si discuta la possibilità che tutte le orbite siano chiuse. Suggerimento: $2\pi\tau/T$ fornisce la variazione dell'angolo durante un'orbita nel limite delle piccole oscillazioni intorno al moto circolare uniforme.

Meccanica Razionale (Caglioti - Simonella)
29 maggio 2024
Compito scritto : ESONERO II

Esercizio. Un punto materiale di massa $m > 0$ è soggetto alla forza di gravità (campo di accelerazione $g > 0$) ed è vincolato senza attrito alla superficie di rotazione d'asse verticale x_3 ascendente, descritta in coordinate cartesiane dall'equazione $x_3 = \rho^2$, dove $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
Il punto è sottoposto all'azione di due altre forze:
(i) la forza costante di intensità $f \geq 0$, diretta lungo l'asse x_1, di energia potenziale $U_f = -fx_1$;
(ii) la forza di repulsione dall'asse verticale di energia potenziale $U_\gamma(\rho) = -\gamma \log \rho$, con $\gamma > 0$.

(1) Si scriva la lagrangiana del sistema, utilizzando le coordinate polari ρ, θ sul piano cartesiano orizzontale.

(2) Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema al variare dei parametri $g > 0, f > 0, \gamma > 0$.

(3) Si discuta la stabilità delle posizioni di equilibrio di cui al punto precedente.

(4) Nel caso $f > 0$, si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

(5) Nel caso $f = 0$, si determinino due integrali primi indipendenti.

(6) Nel caso $f = 0$, si discuta qualitativamente il moto radiale.

(7) Nel caso $f = 0$: (a) si trovi un dato iniziale che dia luogo ad un moto circolare uniforme e si calcoli il periodo dell'orbita trovata.

(8 - Facoltativo.) Si consideri il moto libero sulla superficie parabolica, corrispondente al caso
$g = f = \gamma = 0$:
(a) per quali dati iniziali il moto è illimitato?;
(b) per quali dati iniziali il moto compie infiniti giri intorno all'origine?