

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 07 febbraio 2022

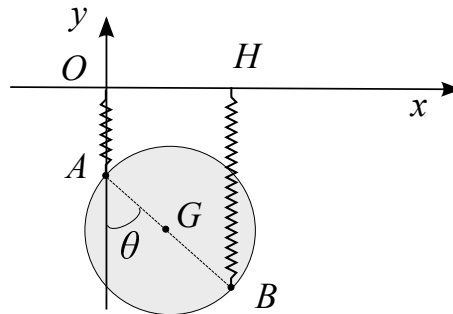
Prof. M. Bonvini, A. Crisanti, L. Gualtieri

1. Meccanica Lagrangiana [15 punti]. In un piano verticale è assegnato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , con y verticale ascendente. In tale piano si muove un disco omogeneo di massa m e raggio R con il punto A posto sul bordo del disco vincolato a muoversi lungo l'asse y . Il disco è soggetto alle forze elastiche $\underline{F}_1 = -k \underline{OA}$ e $\underline{F}_2 = -2k \underline{HB}$, con $k > 0$, dove B è il punto sul bordo del disco diametralmente opposto ad A ed H la proiezione di B sull'asse x .

Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa y del punto A e l'angolo θ tra l'asse y ed il diametro \underline{AB} orientato in senso antiorario [vedere figura].

1. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità al variare del parametro adimensionale $\alpha \equiv \frac{mg}{kR}$.
3. Ponendo ora, $m = 1$, $R = 1$, $g = 1$ e $k = 1/4$ si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa G è $I_G = \frac{1}{2}mR^2$.



Es. 1

2. Trasformazioni canoniche [5 punti]. Si consideri la trasformazione

$$q = -2p^\alpha P^\beta - P^{2\beta},$$

$$Q = p^2 + 2pP,$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P , con α, β parametri reali.

1. Determinare la coppia di valori di α, β per cui la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F(p, P)$ della trasformazione canonica.

3. Cinematica relativistica [5 punti]. Un uomo di 40 anni è stufo di sentirsi dire dal figlio di 15 anni “Sei troppo vecchio”. Egli decide quindi di partire per un viaggio a bordo di un'astronave che sia allontana dalla Terra a velocità costante v , per poi invertire la rotta ad un certo istante e tornare sulla Terra sempre alla stessa velocità. Al rientro sulla Terra incontra di nuovo il figlio e gli dice “Adesso siamo coetanei!”

1. Quanto deve valere la velocità v affinché il figlio sia invecchiato di 50 anni?
2. Quanto deve valere la velocità v affinché il padre sia invecchiato di 15 anni?

4. Trasformazioni di Lorentz [5 punti]. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z) . Siano dati due eventi E_1, E_2 di coordinate, nel riferimento dato,

$$E_1 = (\alpha, \sqrt{3}, 2, 0), \quad E_2 = (0, 0, 2, 1)$$

con α parametro reale.

1. Determinare per quali valori di α esiste un sistema di riferimento nel quale gli eventi E_1, E_2 sono simultanei.
2. Per questi valori di α , determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e quello di partenza.
3. Determinare la separazione spaziale tra E_1 ed E_2 nel nuovo riferimento.

Soluzioni

1. Meccanica lagrangiana.

La lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{y}^2 + \frac{3R^2}{2} \dot{\theta}^2 + 2R \sin \theta \dot{y} \dot{\theta} \right) - k \left(\frac{3}{2} y^2 + \alpha R y - 4R y \cos \theta - \alpha R^2 \cos \theta + 4R^2 \cos^2 \theta \right).$$

Le posizioni di equilibrio sono:

1. $\theta = 0$, $y = -\frac{R}{3}(\alpha - 4)$, Instabile.
2. $\theta = \pi$, $y = -\frac{R}{3}(\alpha + 4)$, Stabile se $\alpha > 8$.
3. $\cos \theta = -\frac{\alpha}{8}$, $y = -\alpha R/2$, esiste solo per $\alpha < 8$, ed è sempre Stabile.

La posizione di equilibrio stabile con i dati forniti è la terza, con $\theta = 2\pi/3$, ovvero $\theta = -2\pi/3$ simmetrica rispetto all'asse y , e $y = -2R$. Le piccole oscillazioni attorno ad essa sono caratterizzati dalle pulsazioni proprie

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. Trasformazioni canoniche.

1. La trasformazione è canonica per $\alpha = 1$, $\beta = 1$.
2. La funzione generatrice è $F(p, P) = pP^2 + p^2P$.

3. Cinematica relativistica. Indicando con t il tempo trascorso sulla Terra, con τ il tempo trascorso sull'astronave e con $\Delta T = 25$ la differenza di età iniziale tra padre e figlio, si ha

1. $\beta^2 = 1 - \left(\frac{t - \Delta T}{t}\right)^2$ da cui $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$
2. $\beta^2 = 1 - \left(\frac{\tau}{\tau + \Delta T}\right)^2$ da cui $v = \frac{\sqrt{55}}{8}c$

4. Trasformazioni di Lorentz.

1. $-2 < \alpha < 2$
2. La trasformazione è la composizione

$$(ct, x, y, z) \rightarrow (ct', x', y', z') \rightarrow (ct'', x'', y'', z'')$$

dove la prima è una rotazione nel piano $x - z$ di un angolo $\theta = \pi/6$, e la seconda è un boost lungo l'asse x' con velocità

$$v = \frac{\alpha}{2}c.$$

3. La separazione spaziale tra gli eventi nel nuovo riferimento è $\Delta r'' = \Delta x'' = \sqrt{4 - \alpha^2}$.