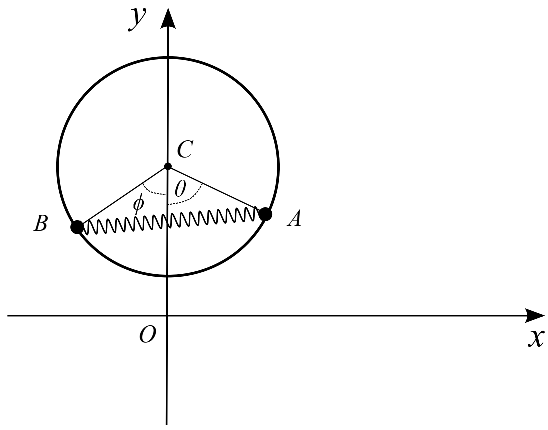
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 24 gennaio 2023
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, M. Papinutto

Esercizio 1. In un piano orizzontale Oxy giace una guida circolare di raggio R e massa trascurabile il cui centro è vincolato a muoversi lungo l'asse y. Si denoti con ξ la coordinata y del centro C della guida. Lungo la guida possono scorrere senza attrito due palline A e B, entrambe di massa m, unite tra loro da una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla. Si denotino con θ e ϕ gli angoli dei raggi che congiungono le palline al centro della guida rispetto all'asse y, crescenti in senso antiorario, come mostrato in figura.



1. Si scriva la Lagrangiana L del sistema.
2. Si calcolino i tre momenti cinetici p_ξ, p_θ, p_ϕ.
3. Si identifichino due integrali primi.
4. Quali vincoli sul centro C della guida (ovvero sulla coordinata ξ) sono necessari affinché la funzione

$$f(\xi, \theta, \phi, \dot{\xi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = mR^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})$$

sia integrale primo del moto?

Esercizio 2. Si consideri la seguente Lagrangiana

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + x^2\dot{y}^2\right) - \frac{a}{2}x^2 + \ln x - bx \sin y,$$

con $x > 0$, ed m, a e b opportune costanti positive. Si chiede:

1. La Hamiltoniana e le relative equazioni di Hamilton.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità.
3. Scelto un punto di equilibrio stabile le frequenze delle piccole oscillazioni.

Esercizio 3. Sia data l'Hamiltoniana:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}e^{-2p} + \alpha q,$$

(con $\alpha \in \mathbb{R}$). Sia data inoltre una funzione generatrice del terzo tipo (con $P, Q > 0$):

$$F_3(p, Q) = -Qe^{-p} + \frac{Q^2}{2}.$$

1. Si scriva la trasformazione canonica $Q(q, p), P(q, p)$ da essa generata e la sua inversa $q(Q, P), p(Q, P)$;
2. Si calcoli la nuova Hamiltoniana $K(Q, P)$ e si determini il valore di α tale per cui $K(Q, P)$ non contenga alcun termine in Q^2.

Esercizio 4. Un'astronave si allontana dalla Terra con velocità costante v. Al momento della partenza gli orologi sulla Terra e sull'astronave segnano il tempo $t = 0$. Dopo un tempo t_1 la Terra invia un segnale luminoso all'astronave, che non appena lo riceve inverte la rotta e torna sulla Terra alla stessa velocità. Al suo arrivo, l'orologio sulla Terra segna un tempo $t^* = 10y$, mentre quello sull'astronave riporta il tempo $\tau^* = 8y$.

1. Qual è la velocità v dell'astronave?
2. Quanto vale t_1?
3. Esistono infiniti sistemi di riferimento in cui l'evento "il segnale luminoso parte dalla Terra", detto E_1, può essere simultaneo a eventi sull'astronave. Individuare l'intervallo temporale (misurato dall'orologio sull'astronave) entro il quale gli eventi sull'astronave possono essere simultanei a E_1.

Soluzioni

Esercizio 1.
La Lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{m}{2}\left[2\dot{\xi}^2 + R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + 2R\dot{\xi}(\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi)\right] - kR^2\left[1 - \cos(\theta - \phi)\right]$$

da cui si ottengono i momenti cinetici

$$\begin{aligned} p_\xi &= 2m\dot{\xi} + mR(\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi) \\ p_\theta &= mR^2\dot{\theta} + mR\dot{\xi}\sin\theta \\ p_\phi &= mR^2\dot{\phi} + mR\dot{\xi}\sin\phi. \end{aligned}$$

La Lagrangiana non dipende da ξ e dal tempo t, quindi p_ξ e l'energia generalizzata

$$\mathcal{H}(\xi, \theta, \phi, \dot{\xi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}\left[2\dot{\xi}^2 + R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + 2R\dot{\xi}(\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi)\right] + kR^2\left[1 - \cos(\theta - \phi)\right]$$

sono due integrali primi.
La funzione f è un integrale primo se

$$\frac{d}{dt}f(\xi, \theta, \phi, \dot{\xi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = mR^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) = -mR\ddot{\xi}(\sin\theta + \sin\phi) = 0,$$

che si realizza se ξ è fissato o vincolato a muoversi di moto uniforme.

Esercizio 2.
La Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + \frac{p_y^2}{x^2}\right) + \frac{a}{2}x^2 - \ln x + bx\sin y$$

e le equazioni di Hamilton sono

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m} \qquad \frac{dp_x}{dt} = \frac{p_y^2}{mx^3} - ax + \frac{1}{x} - b\sin y$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y}{mx^2} \qquad \frac{dp_y}{dt} = -bx\cos y.$$

Le configurazioni di equilibrio sono due e sono date da $y_\pm = \pm\frac{\pi}{2}$, $x_\pm = \mp\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{a}}$, solo la soluzione (x_-, y_-) è stabile.
Le pulsazioni sono

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a + 1/x_-^2}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{b}{mx_-}}.$$

Esercizio 3.
La trasformazione è

$$Q = -qe^p \qquad q = -Q(P + Q)$$

$$P = e^{-p} + qe^p \qquad p = -\ln(P + Q)$$

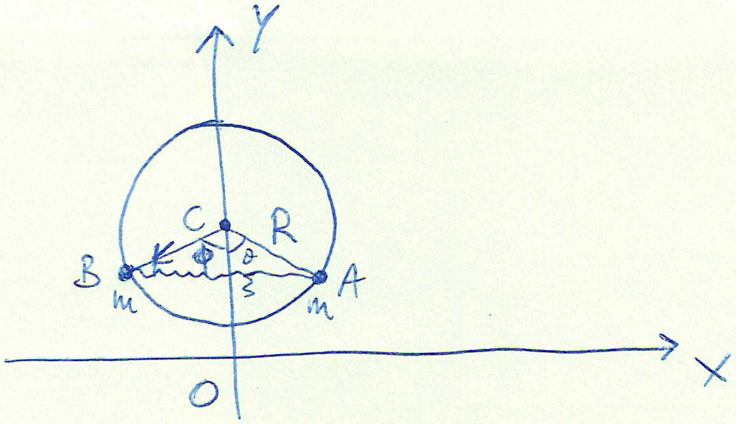
Sostituendo $q(Q, P)$ e $p(Q, P)$ in $H(q, p)$ si ottiene

$$K(Q, P) = \frac{1}{2}(P + Q)^2 - \alpha Q(P + Q)$$

che non ha termini proporzionali a Q^2 se $\alpha = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.
Si trova $\gamma = \frac{5}{4}$, quindi $v = \frac{3}{5}c$. Il segnale parte al tempo $t_1 = \frac{t^*}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = 2y$.
L'intervallo temporale richiesto è $\frac{1 - v/c}{1 + v/c}\frac{\tau^*}{2} < \tau < \frac{\tau^*}{2}$, ovvero $1y < \tau < 4y$.

1



1. $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 + \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2\right) - \frac{K}{2}\left(\underline{x}_A - \underline{x}_B\right)^2$$

$$x_A = R\sin\theta \qquad \dot{x}_A = R\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$y_A = -R\cos\theta + \xi \qquad \dot{y}_A = +R\sin\theta\,\dot{\theta} + \dot{\xi}$$

$$x_B = R\sin\phi \qquad \dot{x}_B = +R\cos\phi\,\dot{\phi}$$

$$y_B = -R\cos\phi + \xi \qquad \dot{y}_B = R\sin\phi\,\dot{\phi} + \dot{\xi}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left[R^2\dot{\theta}^2 + \dot{\xi}^2 + 2R\sin\theta\,\dot{\theta}\dot{\xi} + R^2\dot{\phi}^2 + \dot{\xi}^2 + 2R\sin\phi\,\dot{\phi}\dot{\xi}\right]$$

$$-\frac{K}{2}\left[R^2(\sin\theta - \sin\phi)^2 + R^2(\cos\theta - \cos\phi)^2\right]$$

$$= \frac{2}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{m}{2}\left[R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + 2R\sin\theta\,\dot{\theta}\dot{\xi} + 2R\sin\phi\,\dot{\phi}\dot{\xi}\right]$$

$$-\frac{KR^2}{2}\left[2 - 2(\sin\phi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi)\right]$$

$$+\cos(\theta - \phi)$$

2. $$p_\xi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} = 2m\dot{\xi} + mR(\sin\theta\,\dot{\theta} + \sin\phi\,\dot{\phi})$$

$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = m(R^2\dot{\theta} + R\sin\theta\,\dot{\xi})$$

$$p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = m(R^2\dot{\phi} + R\sin\phi\,\dot{\xi})$$

3. $\begin{cases} H = p_\xi \dot{\xi} + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\phi} - \mathcal{L} \\ p_\xi \end{cases}$ sono integrali primi

4. $$\frac{d}{dt} f = mR^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi})$$

Eq. del moto: $$\dot{p}_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m(R^2 \ddot{\theta} + R\cos\theta\, \dot{\theta}\dot{\xi} + R\sin\theta\, \ddot{\xi}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

$$\dot{p}_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = m(R^2 \ddot{\varphi} + R\cos\phi\, \phi\dot{\xi} + R\sin\phi\, \ddot{\xi}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

Sommo: $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mR\cos\theta\, \dot{\theta}\dot{\xi} - \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$mR^2(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + mR\cancel{(\cos\theta\,\dot{\theta} + \cos\phi\,\dot{\phi})\dot{\xi}} + mR(\sin\theta + \sin\varphi)\ddot{\xi} = 0$$

$$\cancel{mR\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\xi}} + \cancel{mR\cos\phi\,\dot{\phi}\dot{\xi}}$$

$$mR^2(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) = -mR(\sin\theta + \sin\varphi)\ddot{\xi}$$

(2)

$$\mathcal{L}(\dot x, \dot y, x, y) = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + x^2 \dot y^2\right) - \frac{a}{2}x^2 + \ln x - b x \sin y$$

1. $$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x} = m\dot x$$

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot y} = m x^2 \dot y$$

$$H = m\dot x^2 + m x^2 \dot y^2 - \mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + x^2\dot y^2\right) + \frac{a}{2}x^2 + \ln x - b x \sin y$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2mx^2} + \frac{a}{2}x^2 - \ln x + b x \sin y$$

$$\begin{cases} \dot p_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -a x + \dfrac{1}{x} - b \sin y + \dfrac{p_y^2}{m x^3} \\ \dot p_y = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -b x \cos y \\ \dot x = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m} \\ \dot y = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} = \dfrac{p_y}{m x^2} \end{cases}$$

2. <u>Equilibrio:</u> $\dot p_y = 0 = -b x \cos y \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$\dot p_x = 0 = -a x + \frac{1}{x} - b \sin y$ $\qquad x = 0$ NO

$y = \frac{\pi}{2}$ $\quad -a x + \frac{1}{x} - b = 0 \quad -a x^2 - b x + 1 = 0$

$y = \frac{3\pi}{2}$ $\quad -a x + \frac{1}{x} + b = 0 \quad -a x^2 + b x + 1 = 0$

$$y = \frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{-2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{a}}$$

$$y = \frac{3\pi}{2} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{-2a} \Rightarrow x = \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{a}}$$

<u>Stabilità</u> $\quad V(x,y) = \frac{a x^2}{2} - \ln x + b x \sin y$

$$K = \begin{pmatrix} a + \frac{1}{x^2} & +b\cos y \\ +b\cos y & -b x \sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -b x \sin y \end{pmatrix}$$

$$x > 0 \Rightarrow \sin y < 0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \bar y &= \frac{3\pi}{2} \\ \bar x &= \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{a}} \end{aligned}}$$

3.

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m\bar x^2} + \frac{1}{2}(\delta x, \delta y)\, K \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \qquad \cancel{K = \begin{pmatrix} a + \frac{1}{\bar x^2} & 0 \\ 0 & b\bar x \end{pmatrix}}$$

$$+ \frac{1}{2}\delta x^2 \left(a + \frac{1}{\bar x^2}\right) + \frac{1}{2}\delta y^2\, b\bar x$$

~~det~~ già disaccoppiato. $\qquad \cancel{g = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}}$

$$m\omega_x^2 = a + \frac{1}{\bar x^2} \qquad \omega_x = \sqrt{\frac{1}{m}\left(a + \frac{1}{\bar x^2}\right)}$$

$$m\bar x^2 \omega_y^2 = b\bar x \qquad \omega_y = \sqrt{\frac{b}{m\bar x}}$$

③

$$\begin{cases} H(p,q) = \frac{1}{2} e^{-2p} + \alpha q \\ F_3(p,Q) = -Q e^{-p} + \frac{Q^2}{2} \end{cases}$$

1. $$\begin{cases} q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = -Q e^{-p} \\ P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = e^{-p} - Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = -q e^{p} \\ P = e^{-p} + q e^{p} \end{cases}$$

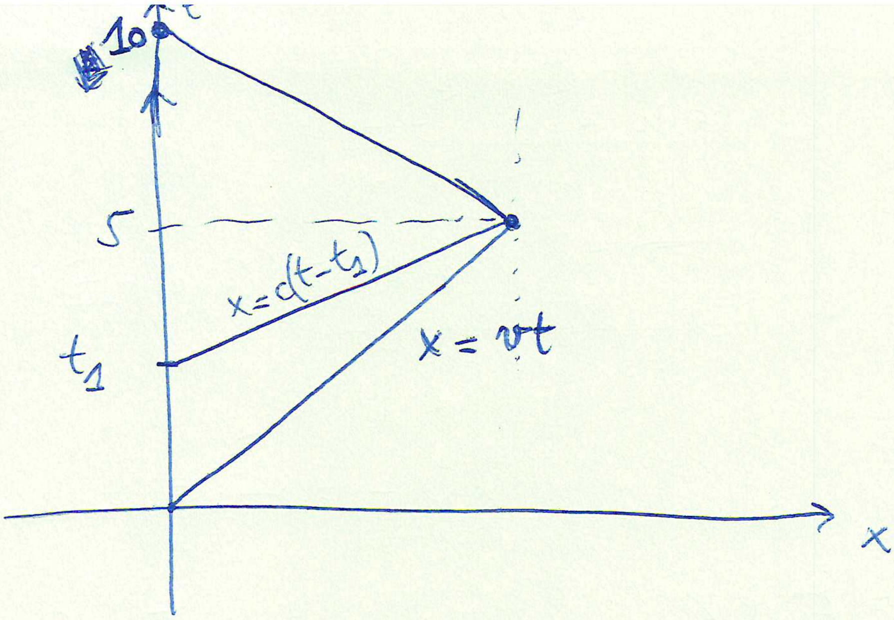
$$\begin{cases} p = -\log(P+Q) \\ q = -Q(P+Q) \end{cases}$$

2. $$K(Q,P) = \frac{1}{2}(P+Q)^2 \overset{-}{\cancel{+}} \alpha Q (P+Q)$$

$$= \frac{1}{2}(P^2 + 2PQ + Q^2) - \alpha P Q - \alpha Q^2$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

4



1. $\tau = \dfrac{t^*}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \dfrac{10}{8} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\qquad 1-\dfrac{v^2}{c^2} = \left(\dfrac{8}{10}\right)^2$

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{8}{10}\right)^2} = c\sqrt{1-\frac{64}{100}} = c\,\frac{6}{10} = \frac{3}{5}c$$

2. $c(5-t_1) = v5 \qquad 5(c-v) = ct_1 \qquad t_1 = 5\left(1-\dfrac{v}{c}\right)$

$$= 5\left(\frac{2}{5}\right) = 2$$

3. $E_1 = (t_1, 0)$
$E_2 = (t, vt)$

Se $t<0$ non possono essere simultanei (l'astronave è sulla Terra)

Se $t>5$ neanche per causalità

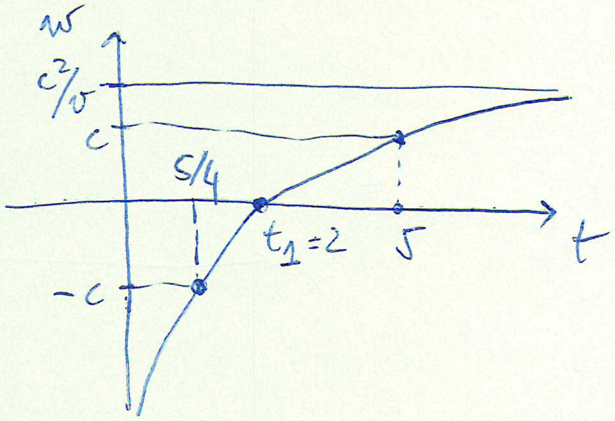
Dunque $0 \le t \le 5$.

Boost w

$$t_1' = \gamma_w(t_1)$$
$$t_2' = \gamma_w\left(t - \frac{w}{c^2}vt\right) = t_1' = \gamma_w t_1$$

$$\Rightarrow \quad t\left(1-\frac{wv}{c^2}\right) = t_1$$

$$\frac{w\,v}{c^2} = 1 - \frac{t_1}{t} \qquad w = \frac{c^2}{v}\left(1 - \frac{t_1}{t}\right)$$



$$w = c = \frac{c^2}{v}\left(1 - \frac{t_1}{t}\right)$$

$$\frac{v}{c} = 1 - \frac{t_1}{t} \Rightarrow t = 5$$

$$w = -c = \frac{c^2}{v}\left(1 - \frac{t_1}{t}\right)$$

$$-\frac{v}{c} = 1 - \frac{t_1}{t} \qquad \frac{t_1}{t} = 1 + \frac{v}{c} \qquad t = \frac{t_1}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{2}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{4} < t < 5$$

Nel rif dell' astronave, $\tau = \frac{4}{5} t \qquad 1 < \tau < 4$