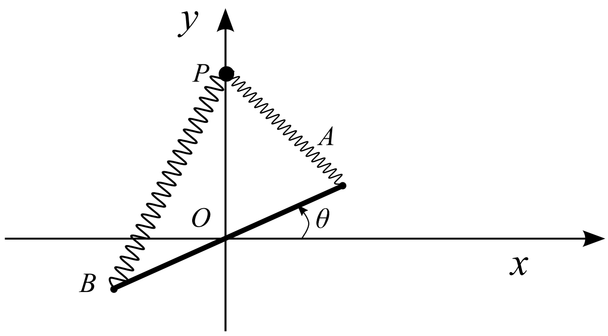
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 16 giugno 2023
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, M. Papinutto

Esercizio 1 [7 punti].



Una sbarra omogenea AB di massa M e lunghezza $2a$ posta in un piano verticale può ruotare senza attrito intorno al suo centro di massa G coincidente con l'origine O di un sistema di riferimento Oxy con l'asse y orientato verso l'alto. Sull'asse y è vincolato a scorrere, senza attrito, un punto materiale P di massa m. Il punto P è collegato agli estremi A e B mediante due molle di massa e lunghezza a riposo trascurabili e costanti elastiche $k_A = k$ e $k_B = 2k$, con $k > 0$. Oltre alle forze elastiche, il sistema è soggetto alla forza gravitazionale.

Utilizzando come coordinate generalizzate l'ordinata y del punto P e l'angolo θ che la sbarra forma con l'asse positivo x [vedi figura], si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema.
2. La Hamiltoniana del sistema.
3. Le equazioni di Hamilton.

Esercizio 2 [9 punti]. Un sistema è descritto dalla seguente Hamiltoniana

$$H(x, y, \phi, p_x, p_y, p_\phi) = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + \frac{p_\phi^2}{a + x^2}\right) - bx\sin\phi + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + 2hx\sin\phi).$$

dove a, b, h e k sono parametri reali positivi.

Si chiede:

1. Scrivere le equazioni di Hamilton.
2. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e loro la stabilità in funzione del parametro $\lambda = (b-kh)/k \neq 0$.
3. Scelta una posizione di equilibrio stabile, determinare le frequenze delle piccole oscillazioni.
4. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e loro la stabilità per $\lambda = 0$. In questo caso esistono integrali primi oltre all'energia totale?

Esercizio 3 [6 punti]. Si consideri la seguente Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2q^2 - pq\big(1+\ln q\big) + \frac{1}{2}(\ln q)^2,$$

con $q > 0$, e la trasformazione

$$\begin{cases} p = -Q\, q^a, \\ P = Q + Q^b \ln q. \end{cases}$$

Si chiede:

1. Determinare i valori di a e b tale che la trasformazione sia canonica.
2. Determinare la trasformazione canonica da (q,p) a (Q,P) e la sua inversa da (Q,P) a (p,q).
3. Applicare la trasformazione canonica trovata alla Hamiltoniana $H(q,p)$ e determinare $K(Q,P)$.

Esercizio 4 [8 punti]. Un'astronave, dopo aver sincronizzato l'orologio con quello della base, parte nella direzione positiva dell'asse x di un sistema di riferimento R solidale con la base. L'astronave si muove con velocità costante v_1. Dopo un tempo τ misurato dall'orologio dell'astronave, questa invia un segnale di controllo alla base. Il segnale raggiunge la base quando l'orologio della base segna il tempo $t_s = \sqrt{2}\tau$. Ricevuto il segnale, dalla base viene mandato un segnale all'astronave per farla rientrare. L'astronave, ricevuto il segnale di rientro, inverte la rotta ma dimezza la sua velocità.

Si chiede:

1. La velocità v_1 con cui viaggia l'astronave.
2. Il tempo t_r che segna l'orologio della base al rientro dell'astronave
3. il tempo τ_r che segna l'orologio dell'astronave al suo rientro alla base.
4. Indicato con E_1 l'evento in cui l'astronave invia il segnale di controllo alla base e, con E_2 l'evento in cui il segnale di rientro inviato dalla base raggiunge l'astronave, esiste un sistema di riferimento R' in cui gli eventi avvengono nello stesso punto spaziale? Se esiste calcolare la velocità u del sistema di riferimento R' rispetto ad R, e la velocità dell'astronave rispetto a R'.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. La Lagrangiana del sistema è

$$L(y,\theta,\dot y,\dot\theta)=\frac{m}{2}\dot y^2+\frac{Ma^2}{6}\dot\theta^2-mgy-\frac{k}{2}\big(3y^2+2ay\sin\theta+3a^2\big).$$

2. La Hamiltoniana del sistema è

$$H(y,\theta,p_y,p_\theta)=\frac{1}{2m}p_y^2+\frac{3}{2Ma^2}p_\theta^2+mgy+\frac{k}{2}\big(3y^2+2ay\sin\theta+3a^2\big).$$

3. Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases}\dot y=\dfrac{p_y}{m},\\ \dot\theta=\dfrac{3\,p_\theta}{Ma^2},\\ \dot{p_y}=-mg-k\big(3y+a\sin\theta\big),\\ \dot{p_\theta}=-kay\cos\theta.\end{cases}$$

Esercizio 2.

1.

$$\begin{cases}\dot x=p_x,\\ \dot y=p_y,\\ \dot\phi=\dfrac{p_\phi}{a+x^2},\\ \dot{p_x}=\dfrac{x}{(a+x^2)^2}\,p_\phi^2+(b-kh)\sin\phi-kx,\\ \dot{p_y}=-ky,\\ \dot{p_\phi}=(b-kh)\,x\,\cos\phi.\end{cases}$$

il moto lungo y è disaccoppiato dal moto lungo x e ϕ.

2. Il moto lungo y è un oscillatore armonico con frequenza $\omega_y^2=k$ disaccoppiato con il moto lungo x e ϕ. Di conseguenza la posizione di equilibrio lungo y è $y=0$ ed è stabile. Per il moto lungo x e ϕ si hanno le seguenti posizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}&1:(x,\phi)=(0,0) &&\Rightarrow \text{Instabile}\\ &2:(x,\phi)=(0,\pm\pi) &&\Rightarrow \text{Instabile}\\ &3:(x,\phi)=(\lambda,\pi/2) &&\Rightarrow \text{Stabile}\\ &4:(x,\phi)=(-\lambda,-\pi/2) &&\Rightarrow \text{Stabile}\end{aligned}$$

3. Le piccole oscillazioni intorno ai punti $3:$ e $4:$ si disaccoppiano lungo x e lungo ϕ con frequenze rispettivamente

$$\begin{aligned}x:&\quad \omega_x^2=k,\\ \phi:&\quad \omega_\phi^2=\frac{k\lambda^2}{a+\lambda^2}.\end{aligned}$$

Riassumendo le posizioni di equilibrio stabili del sistema sono $(x,y,\phi)=(\lambda,0,\pi/2)$ e $(x,y,\phi)=(-\lambda,0,-\pi/2)$ con le frequenze ω_x, ω_y e ω_ϕ.

4. Se $\lambda = 0$ l'Hamiltoniana si riduce a
$$H(x, y, \phi, p_x, p_y, p_\phi) = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + \frac{p_\phi^2}{a + x^2}\right) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2).$$
Di conseguenza p_ϕ è un integrale primo del moto e ϕ una variabile ciclica. Il moto in x e y sono due oscillatori armonici disaccoppiati con frequenza $\omega_x^2 = \omega_y^2 = k$.
Le posizioni di equilibrio del sistema sono $p_\phi = 0$, ϕ arbitrario e $x = y = 0$. Lungo ϕ l'equilibrio è indifferente, mentre lungo x e y è stabile, e le oscillazioni hanno frequenze $\omega_x^2 = \omega_y^2 = k$.

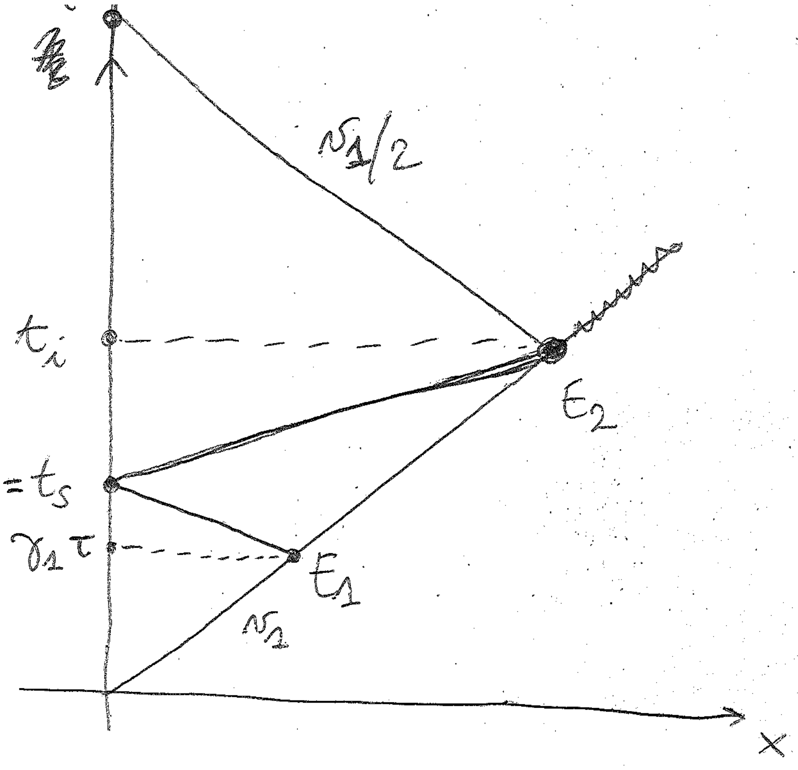
Esercizio 3.

1. $$a = -1, \qquad b = 0.$$
2. La trasformazione canonica e la sua inversa sono
$$\begin{cases} q = \mathrm{e}^{P-Q}, \\ p = -Q\,\mathrm{e}^{-P+Q}, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} Q = -pq, \\ P = -pq + \ln q. \end{cases}$$
3. $$K(Q, P) = \frac{1}{2}P^2 + Q.$$

Esercizio 4.

1. $$v_1 = \frac{(t_s/\tau)^2 - 1}{(t_s/\tau)^2 + 1}\, c = c/3.$$
2. $$t_r = \frac{3\,t_s}{1 - v_1/c} = \frac{3}{2}\left[\left(\frac{t_s}{\tau}\right)^2 + 1\right] t_s = \frac{9}{\sqrt{2}}\tau.$$
3. $$\tau_r = \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{2}{\gamma_2}\right)\frac{t_s}{1 - v_1/c} = \left[a + \frac{1}{2}\sqrt{3a^4 + 10a^2 + 3}\right] t_s = \left[2 + \sqrt{\frac{35}{2}}\right]\tau.$$
con $\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - v_1^2/c^2}$, $\gamma_2 = 1/\sqrt{1 - v_1^2/4c^2}$ ed $a = t_s/\tau$.
4. Indicati gli eventi
$$E_1 = (ct_1, x_1), \qquad E_2 = (ct_2, x_2)$$
con $x_1 = v_1 t_1$ e $x_2 = v_1 t_2$, si ha
$$S_{12}^2 = \left[\left(\frac{t_s}{\tau}\right)^2 - 1\right]^2 c^2\tau^2 = c^2\tau^2.$$
Gli eventi sono di tipo tempo per cui esiste un riferimento R' dove avvengono nello stesso punto spaziale.
Il sistema R' si muove rispetto ad R con velocità
$$u = \beta c = \frac{x_2 - x_1}{c(t_2 - t_1)}c = v_1 = c/3.$$
Il sistema di riferimento R' è solidale con l'astronave, per cui la velocità dell'astronave rispetto a R' è
$$v_1' = 0.$$

(4)



4. R' è banalmente il riferimento dell'astronave, dunque $u = v_1$ e l'astronave è ferma in R'

1. $$\gamma_1 \tau + \frac{v_1 \gamma_1 \tau}{c} = \sqrt{2}\,\tau$$

$$\left(1 + \frac{v_1}{c}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \sqrt{2} \qquad \sqrt{\frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c}} = \sqrt{2}$$

$$1 + \frac{v_1}{c} = 2\left(1 - \frac{v_1}{c}\right) \qquad 3\frac{v_1}{c} = 1 \qquad \boxed{\frac{v_1}{c} = \frac{1}{3}} \quad \gamma_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

2. $$c\,(t_i - t_s) = v_1 t_i \qquad (c - v_1)\,t_i = c\,t_s$$

$$t_i = \frac{c\,t_s}{c - v_1} = \frac{t_s}{1 - v_1/c} = \frac{3}{2} t_s = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,\tau$$

$$t_r = t_i + 2t_i = 3t_i = \frac{9}{2}\sqrt{2}\,\tau$$

3. $$\tau_r = \frac{t_i}{\gamma_1} + \frac{2t_i}{\gamma(v_1/2)} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{\frac{35}{36}}\right)\frac{3}{2}\sqrt{2}\,\tau$$

$$= \left(2 + \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{2}}\right)\tau$$