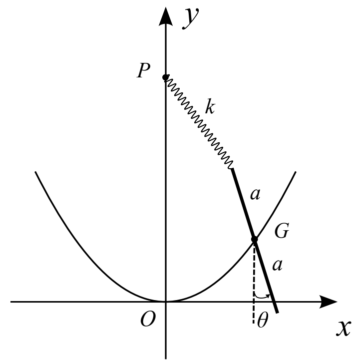
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica dell'11 luglio 2023
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, M. Papinutto

Esercizio 1 [13 punti]. In un piano orizzontale Oxy giace una guida parabolica di equazione $y = \beta x^2$. Una sbarra omogenea di massa M e lunghezza $2a$ giace sul piano e il suo centro è vincolato a muoversi lungo la guida parabolica. Inoltre, un suo estremo è connesso con una molla ideale di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla al punto P sull'asse y di coordinate $(0, \lambda a)$.



Introdotte le coordinate lagrangiane x, θ come in figura (ascissa del centro di massa e angolo rispetto all'asse y), si chiede:

1. Calcolare la Lagrangiana del sistema
2. Dimostrare che il sistema è descritto dall'Hamiltoniana
$$H(x,\theta,p_x,p_\theta,t) = \frac{p_x^2}{2M(1+4\beta^2x^2)} + \frac{3p_\theta^2}{2Ma^2} + \frac{k}{2}\Big[(1-2\beta\lambda a)x^2 + \beta^2x^4 - 2ax\sin\theta - 2a(\lambda a - \beta x^2)\cos\theta\Big].$$
3. Verificare che esistono configurazioni di equilibrio con $x = 0$ e determinare i valori di θ corrispondenti.
4. Assumendo $\beta = 1/a$, studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate al punto precedente in funzione di λ.
5. Fissato $\lambda = -2$ e scelta una configurazione di equilibrio stabile, si determinino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

Esercizio 2 [9 punti]. Si consideri la seguente Hamiltoniana
$$H(q,p,t) = p + p^3\,(q-t)^2,$$
con $q > 0$, e la trasformazione
$$\begin{cases} Q = p^{-2}\,(q-t)^\beta, \\ P = p^\alpha (q-t)^2. \end{cases}$$

Si chiede:

1. Determinare i valori di α e β tale che la trasformazione sia canonica.
2. Determinare la funzione generatrice $F_1(q,Q,t)$ della trasformazione.
3. Applicare la trasformazione canonica trovata alla Hamiltoniana $H(q,p,t)$ data e determinare la nuova Hamiltoniana $K(Q,P,t)$.
4. Scrivere e risolvere le equazioni di Hamilton per Q e P.

Esercizio 3 [8 punti]. Due astronavi, dopo aver sincronizzato gli orologi tra loro e con la base, partono contemporaneamente dalla base, posta nell'origine O di un sistema di riferimento R, muovendosi lungo la direzione positiva dell'asse x. La prima astronave si muove con velocità $v_1 = c/2$ mentre la seconda astronave si muove con velocità $v_2 = c/4$. Quando l'orologio della seconda astronave segna un tempo τ questa invia due segnali: uno alla base di partenza e l'altro alla prima astronave. Si chiede:

1. Il tempo t_0 indicato dall'orologio della base all'arrivo del segnale.
2. Il tempo τ_1 indicato dall'orologio della prima astronave quando essa riceve il segnale.
3. Esiste un sistema di riferimento R' in cui il segnale arriva contemporaneamente alla base e alla prima astronave?
4. Se esiste, determinare la velocità u del sistema R' rispetto al sistema R.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. La Lagrangiana del sistema è:

$$L(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta},t) = \frac{1}{2}M(1+4\beta^2x^2)\dot{x}^2 + \frac{1}{6}Ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{k}{2}\Big[(1-2\beta\lambda a)x^2 + \beta^2x^4 - 2ax\sin\theta - 2a(\lambda a - \beta x^2)\cos\theta\Big]$$

da cui si ricava l'Hamiltoniana data.

3. Le posizioni di equilibrio sono $(x,\theta) = (0,0)$ e $(x,\theta) = (0,\pi)$

4. La prima è stabile per $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, la seconda è stabile per $\lambda < -1$.

5. Per $\lambda = -2$ la posizione stabile è $(x,\theta) = (0,\pi)$, e le pulsazioni sono date da $\omega^2 = \frac{k}{2M}(9 \pm \sqrt{21})$.

Esercizio 2.

1. $\alpha = 3, \beta = -1$.

2. $F_1(q,Q,t) = \pm 2(q-t)^{1/2}\,Q^{-1/2}$, definita a meno di una arbitraria funzione di t, che puo' essere presa nulla in quanto non influisce sulle equazioni del moto.

3. $K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{q,Q} F_1(q,Q,t) = P$.

4.
$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} &= \dfrac{\partial K}{\partial P} = 1, \\ \dfrac{dP}{dt} &= -\dfrac{\partial K}{\partial Q} = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$Q(t) = Q_0 + t, \qquad P(t) = P_0 = \text{costante}.$$

Esercizio 3.

1.
$$t_0 = \sqrt{\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}}\tau = \sqrt{\frac{5}{3}}\,\tau.$$

2.
$$\tau_1 = \sqrt{\frac{(1-\beta_2)(1+\beta_1)}{(1+\beta_2)(1-\beta_1)}}\tau = \frac{3}{\sqrt{5}}\,\tau.$$

3. Indicati gli eventi

$$E_1 = (ct_0, 0), \qquad E_2 = (ct_1, v_1\,t_1)$$

con $t_1 = \gamma_1\tau_1$, si ha

$$S^2 = c^2(t_1-t_0)^2 - v_1^2t_1^2 = 4c^2\tau\frac{\beta_2}{1-\beta_2^2}\,\frac{\beta_2-\beta_1}{1-\beta_1} = -\frac{8}{15}c^2\tau^2 < 0$$

quindi esiste un riferimento R' in cui l'arrivo del segnale è contemporaneo.

4. Il sistema R' si muove rispetto a R con velocità

$$u = \beta c = \frac{\beta_1(1+\beta_2) - 2\beta_2}{\beta_1(1-\beta_2)}c = c/3,$$