Compito di Meccanica Analitica e Relativistica dell'11 settembre 2023
Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, M. Papinutto

Esercizio 1 [6 punti]. Fissato un sistema di riferimento $Oxyz$, con l'asse z orientato verso l'alto, un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di equazione

$$z = \frac{1}{2R}(x^2+y^2) - \frac{R}{4}\log\left(\frac{x^2+y^2}{R^2}\right),$$

dove $R > 0$ è una costante con le dimensioni di una lunghezza. Oltre alla forza peso sul punto materiale agisce una forza elastica esercitata da una molla ideale di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla ancorata all'asse z e ivi libera di scorrere in modo che sia sempre in posizione orizzontale (ovvero alla stessa quota del punto materiale). Utilizzando come coordinate generalizzate le coordinate polari (r, θ) definite sul piano xy, si chiede:

1. la Lagrangiana del sistema $L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ e le associate equazioni di Lagrange;
2. individuare due integrali primi del moto non banali.

Esercizio 2 [8 punti]. Un sistema meccanico è descritto dall'Hamiltoniana

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}\frac{x^2 p_x^2}{1+x^4} + \frac{1}{2}\frac{p_y^2}{x^2} + \frac{1}{2}\lambda x^2 - \log x + \frac{1}{2}\alpha x^2 \sin^2 y$$

con $x > 0$ e λ, α parametri reali. Si determinino:

1. le posizioni di equilibrio del sistema e la loro esistenza e stabilità in funzione di λ e α;
2. scelta una posizione di equilibrio stabile, le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

Esercizio 3 [8 punti]. Si consideri la seguente Hamiltoniana

$$H(q, p) = p - \frac{k}{4}q^4,$$

dove $k > 0$ è una costante di opportune dimensioni.
Si chiede:

1. scrivere e risolvere le equazioni di Hamilton con condizioni iniziali $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$ generiche;
2. scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione $S(q, Q, t) = W(q, Q) - Q\,t$ che mappi la Hamiltoniana $H(q, p)$ in $K(Q, P) = 0$;
3. determinare la trasformazione canonica da (q, p) a (Q, P) generata da $S(q, Q, t)$ e la sua inversa da (Q, P) a (p, q);
4. utilizzare la trasformazione canonica trovata per risolvere le equazioni del moto per (q, p) con condizioni iniziali $q(0) = q_0$ generico e $p(0) = p_0$.

Esercizio 4 [4 punti]. Due astronavi A e B, dopo aver sincronizzato gli orologi con la Terra, partono da essa al tempo $t = \tau_A = \tau_B = 0$ in direzione opposta con velocità v_1 e $-v_1$. Al tempo τ misurato sull'orologio di bordo l'astronave B (che era partita con velocità $-v_1$) inverte la rotta e riparte lungo la stessa direzione con velocià $v_2 > v_1$. Chiamando γ_1 e γ_2 i fattori γ corrispondenti a v_1 e v_2 si trovi:

1. il tempo t misurato sulla Terra per il quale le due astronavi si incontrano;
2. i tempi τ_A e τ_B corrispondenti a t misurati dagli orologi delle due astronavi;
3. i risultati numerici dei punti precedenti nel caso in cui $v_1 = 3/5c$ $v_2 = 4/5c$ and $\tau = 1/7\,y$;

Esercizio 5 [4 punti]. Dati i due eventi $E_1 = (-1, 0, 0, 0)$ ly and $E_2 = (0, \sqrt{3}, \alpha, 0)$ ly nel sistema di riferimento R, con α parametro reale, si chiede:

1. determinare i valori di α tali che esista un sistema di riferimento R' in cui i due eventi sono simultanei;
2. determinare le condizioni sulla velocità $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ tra il sistema R e il sistema R', in funzione di α nel range consentito;
3. assumendo $\beta_1 = \beta_3 = 0$, determinare il valore di β_2 in funzione di α. Tutti i valori di α trovati precedentemente al punto 1 sono ancora possibili?

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Lagrangiana:

$$L(r,\theta,\dot r,\dot\theta)=\frac{1}{2}m\left[r^2\dot\theta^2+\dot r^2\left(\frac{r^2}{R^2}+\frac{R^2}{4r^2}\right)\right]-\frac{1}{2}kr^2-\frac{1}{2}mg\frac{r^2}{R}+\frac{1}{2}mgR\log\frac{r}{R}$$

   Equazioni di Lagrange:

$$m\ddot r\left(\frac{r^2}{R^2}+\frac{R^2}{4r^2}\right)+m\dot r^2\left(\frac{r}{R^2}-\frac{R^2}{4r^3}\right)-mr\dot\theta^2+kr+mg\frac{r}{R}-\frac{mgR}{2r}=0$$

$$mr^2\ddot\theta+2mr\dot r\dot\theta=0$$

2. Il momento cinetico $p_\theta=mr^2\dot\theta$ e l'energia generalizzata

$$\mathcal{H}(r,\theta,\dot r,\dot\theta)=\frac{1}{2}m\left[r^2\dot\theta^2+\dot r^2\left(\frac{r^2}{R^2}+\frac{R^2}{4r^2}\right)\right]+\frac{1}{2}kr^2+\frac{1}{2}mg\frac{r^2}{R}-\frac{1}{2}mgR\log\frac{r}{R}$$

   sono integrali primi.

Esercizio 2.

1. Ci sono quattro posizioni di equilibrio:
   - $y=0,\pi$, $x=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, che esistono per $\lambda>0$ e sono stabili dove esistono per $\alpha>0$;
   - $y=\pm\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{1}{\sqrt{\lambda+\alpha}}$, che esistono per $\lambda+\alpha>0$ e sono stabili dove esistono per $\alpha<0$.
2. Scegliendo la prima coppia di posizioni di equilibrio, le pulsazioni proprie sono $\omega_1^2=\frac{2\lambda^2}{1+\lambda^2}$ e $\omega_2^2=\alpha$. Scegliendo invece le altre due posizioni di equilibrio, le pulsazioni proprie sono $\omega_1^2=\frac{2(\lambda+\alpha)^2}{1+(\lambda+\alpha)^2}$ e $\omega_2^2=-\alpha$.

Esercizio 3.

1.

$$\begin{cases}\dot q=1,\\ \dot p=kq^3,\end{cases}$$

   la cui soluzione è

$$\begin{cases}q(t)=q_0+t,\\ p(t)=p_0-\dfrac{k}{4}q_0^4+\dfrac{k}{4}(q_0+t)^4.\end{cases}$$

2.

$$\frac{\partial W}{\partial q}-\frac{k}{4}q^4=Q,$$

$$S(q,Q,t)=q\,Q+\frac{k}{20}q^5-Q\,t.$$

3.

$$\begin{cases}q=-P+t,\\ p=Q+\dfrac{k}{4}(-P+t)^4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}Q=p-\dfrac{k}{4}q^4,\\ P=-q+t.\end{cases}$$

4. Usando $q(Q,P), p(Q,P)$ con

$$\begin{cases} Q = p_0 - \dfrac{k}{4} q_0^4, \\ P = -q_0. \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} q = q_0 + t, \\ p = p_0 - \dfrac{k}{4} q_0^4 + \dfrac{k}{4}(q_0 + t)^4. \end{cases}$$

Esercizio 4.

1. $t = \tau\gamma_1 \frac{v_1+v_2}{v_2-v_1}$
2. $\tau_A = t/\gamma_1 = \tau \frac{v_1+v_2}{v_2-v_1}$, $\tau_B = \tau + \frac{t-\gamma_1\tau}{\gamma_2} = \left[1 + 2\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\frac{v_1}{v_2-v_1}\right]\tau$.
3. $t = \frac{5}{4}\,y$, $\tau_A = 1\,y$, $\tau_B = \frac{11}{14}\,y$.

Esercizio 5.

1. $\forall\alpha$.
2. $\sqrt{3}\beta_1 + \alpha\beta_2 = 1$ con la condizione $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 < 1$.
3. $\beta_2 = 1/\alpha$ con $|\alpha| > 1$

3. $H(p,q) = p - \frac{k}{4} q^4$

1. $$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = +k q^3 & \Rightarrow \dot{p} = +k(q_0+t)^3 \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 1 & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q(t) = q_0 + t \\ p(t) = +\frac{k}{4}\left[(q_0+t)^4 - q_0^4\right] + p_0 \end{cases}$$

2. $S(q,Q,t) = W(q,Q) - Qt$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} \qquad H = K - \frac{\partial S}{\partial t} = Q = \frac{\partial W}{\partial q} - \frac{k}{4} q^4$$

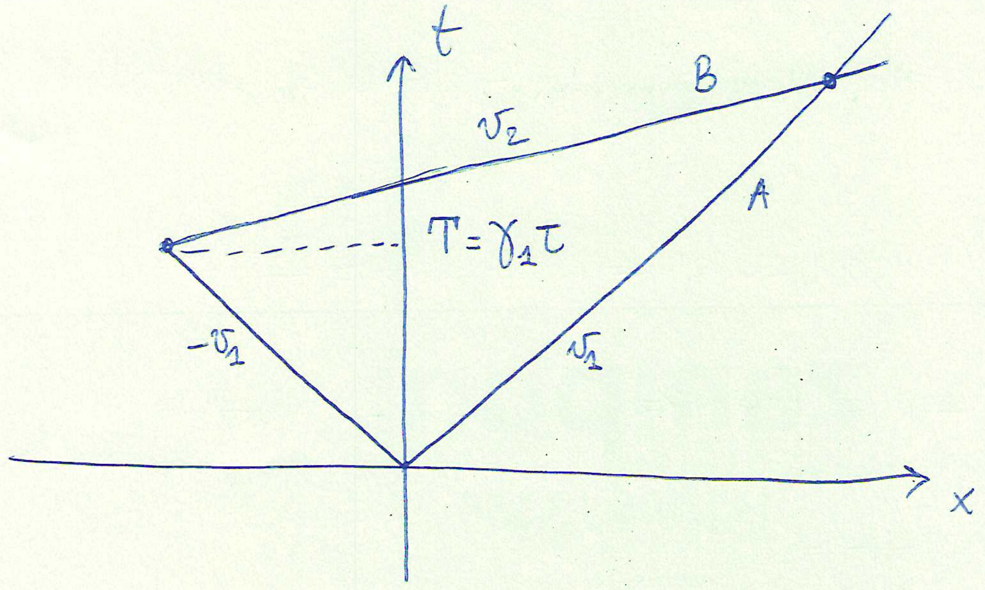
$$P = \frac{\partial W}{\partial Q} - t \qquad W(q,Q) = Qq + \frac{k}{20} q^5$$

3. $$\begin{cases} p = Q + \frac{k}{4} q^4 \\ P = q - t \end{cases} \qquad \begin{cases} Q = p - \frac{k}{4} q^4 \\ P = q - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = P + t \\ p = Q + \frac{k}{4}(P+t)^4 \end{cases}$$

4. $$(p_0, q_0) \rightarrow \begin{cases} P = q_0 \\ Q = p_0 - \frac{k}{4} q_0^4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q = q_0 + t \\ p = p_0 - \frac{k}{4} q_0^4 + \frac{k}{4}(q_0+t)^4 \end{cases}$$

4



1. $$v_1 t = -v_1 T + v_2 (t - T)$$

$$(v_2 - v_1) t = (v_1 + v_2) T \qquad \boxed{t = \frac{v_1 + v_2}{v_2 - v_1} \gamma_1 \tau}$$

2. $$\tau_A = \frac{t}{\gamma_1} = \frac{v_1 + v_2}{v_2 - v_1} \tau$$

$$\tau_B = \tau + \frac{t - T}{\gamma_2} = \tau \left[1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{v_1 + v_2}{v_2 - v_1} \right] = \tau \left[1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{2 v_1}{v_2 - v_1} \right]$$

3. $$\frac{v_1}{c} = \frac{3}{5} \qquad \frac{v_2}{c} = \frac{4}{5} \qquad \tau = \frac{1}{7}\, y \qquad \gamma_1 = \frac{5}{4} \qquad \gamma_2 = \frac{5}{3}$$

$$t = \frac{7/5}{1/5} \cdot \frac{5}{4} \frac{1}{7}\, y = \frac{5}{4}\, y$$

$$\tau_A = \frac{7/5}{1/5} \cdot \frac{1}{7} = 1\, y$$

$$\tau_B = \left(1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot 7 \right) \frac{1}{7}\, y = \frac{22}{28}\, y = \frac{11}{14}\, y$$

(5) $E_1 = (-1, 0, 0, 0)$

$E_2 = (0, \sqrt{3}, \alpha, 0)$

1. $\Delta S = (1, \sqrt{3}, \alpha, 0)$ ↙ di tipo spazio

$$\Delta s^2 = 1 - 3 - \alpha^2 = -2 - \alpha^2 \leq 0 \Rightarrow \forall \alpha$$

2. Ruotiamo l'asse x' in modo che sia parallelo a $\vec{\beta} = (\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$

$$c\Delta t' = \gamma_\beta \left(c\Delta t - \vec{\beta} \cdot \Delta\vec{x} \right) = 0$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 \leq 1$$

$$c\Delta t - \vec{\beta} \cdot \Delta\vec{x} = 0 = 1 - \beta_1\sqrt{3} - \beta_2 \alpha$$

3. $\beta_1 = \beta_3 = 0 \Rightarrow 1 - \beta_2 \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = +\frac{1}{\beta_2}$

ma $\beta_2^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \beta \leq 1 \Rightarrow \alpha > 1$, $\alpha < -1$