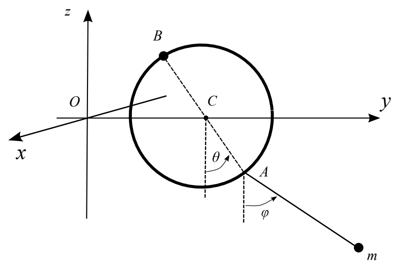
Compito straordinario di Meccanica Analitica e Relativistica del 6 novembre 2023

Proff. M. Bonvini, A. Crisanti, M. Papinutto

Esercizio 1 [6 punti].



Un anello omogeneo di massa M e raggio R può ruotare attorno al suo asse centrale ortogonale al piano verticale yz e parallelo all'asse x del sistema di riferimento $Oxyz$. Il centro C dell'anello può muoversi senza attrito lungo l'asse y. Un pendolo di massa $m < M$ e lunghezza R è sospeso a un punto A dell'anello; un punto materiale di massa M è fissato al punto B dell'anello diametralmente opposto ad A, vedi figura. Sul sistema agisce la forza di gravità.

Utilizzando come coordinate lagrangiane la posizione y del centro del disco e gli angoli θ e φ mostrati in figura:

1. Determinare la Lagrangiana.
2. Discutere le simmetrie continue della Lagrangiana e determinare due integrali primi del moto.

Esercizio 2 [8 punti]. Si consideri la seguente Hamiltoniana

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2(I + mr^2)} + mg(a + r)\sin\theta + \frac{k}{2}r^2,$$

con m, I, g, a e k opportune costanti positive.
Si chiede:

1. Le equazioni di Hamilton.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità.
3. Scelto un punto di equilibrio stabile le frequenze delle piccole oscillazioni.

Esercizio 3 [8 punti]. Si consideri la seguente Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{2}{9}q^4(p - q), \qquad p > q.$$

Si chiede di:

1. scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione $S(q, P, t) = W(q, P) - \frac{1}{2}P^2\, t$ che mappi la Hamiltoniana $H(q, p)$ in $K(Q, P) = 0$;
2. determinare la trasformazione canonica da (q, p) a (Q, P) generata da $S(q, P, t)$ e la sua inversa da (Q, P) a (p, q);
3. utilizzare la trasformazione canonica trovata per risolvere le equazioni del moto per (q, p) con condizioni iniziali $q(0) = -(3/2)^{1/3}$ e $p(0) = 0$.

Esercizio 4 [8 punti]. Due astronavi A e B si trovano sulla terra (sistema di riferimento R). L'astronave A azzera il suo orologio e parte con velocità v_A (evento che avviene a $t = 0$ in R). Dopo un tempo T misurato in R, l'astronave B azzera il suo orologio di bordo e contestualmente parte nella stessa direzione e verso di A con velocità $v_B > v_A$. L'astronave B sorpassa l'astronave A al tempo T_1 misurato in R ed entrambe le astronavi continuano il loro viaggio fino a che gli orologi di bordo non segnano un tempo $\tau_A = \tau_B = \tau_2$. A questo punto invertono il moto e tornano verso la terra con velocità uguale in modulo a quella che avevano durante il viaggio di andata. Chiamando γ_A e γ_B i fattori di Lorentz corrispondenti a v_A e v_B si dica:

1. quali sono il tempo T_1 e la distanza L_1 dalla terra per i quali le due astronavi si incontrano la prima volta (in funzione di T, v_A, v_B);

2. quali sono le distanze L_{2A} e L_{2B} dalla terra ed i tempi T_{2A} e T_{2B} (misurati in R) per i quali le due astronavi invertono il loro moto (in funzione di T, τ_2, v_A, v_B, γ_A, γ_B);

3. Se $v_A = 3/5c$, $v_B = 4/5c$, $T = 1y$ e $\tau_2 = 12y$ esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi che corrispondono all'inversione del moto (vedi punto 2) sono simultanei? Ed uno in cui essi avvengono nello stesso punto dello spazio? Quale sarebbe la loro velocità minima?

4. Si consideri uno dei sistemi di riferimento trovati al punto precedente che si muova lungo un piano qualsiasi passante per l'asse individuato dal moto delle due astronavi e lo si chiami R'. Può esso avere una componente non nulla della velocità (rispetto ad R) in direzione ortogonale a tale asse e, in caso, qual è il valore massimo di tale componente?

Soluzioni

Esercizio 1.

1. La Lagrangiana è $L = T - U$ con

$$T = M\left(\dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - R\dot{\theta}\dot{y}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}m\left[\dot{y}^2 + R^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\right) + 2\dot{y}R(\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\varphi}\cos\varphi)\right]$$
$$V = (M-m)gR\cos\theta - mgR\cos\varphi$$

per cui

$$\begin{aligned} L =& \frac{1}{2}(m+2M)(\dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2) + \frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2 + (m-M)R\,\dot{\theta}\dot{y}\cos\theta + mR\,\dot{\varphi}\dot{y}\cos\varphi + mR^2\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\cos(\theta-\varphi) \\ &- (M-m)gR\cos\theta + mgR\cos\varphi. \end{aligned}$$

da cui seguono le equazioni del moto.

2. L è invariante per traslazioni temporali e lungo y, quindi si conservano l'energia generalizzata $\mathcal{H} = T + U$ e il momento cinetico

$$p_y = (m+2M)\dot{y} + (m-M)R\dot{\theta}\cos\theta + mR\dot{\phi}\cos\varphi.$$

Esercizio 2.

1.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{I + mr^2} \\ \dot{p}_r &= \frac{mr}{(I+mr^2)^2}\,p_\theta^2 - mg\sin\theta - kr \\ \dot{p}_\theta &= -mg(a+r)\cos\theta. \end{aligned}$$

2. I punti di equilibrio sono
   - $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = -\frac{mg}{k}$, esiste sempre, stabile per $\frac{ka}{mg} < 1$
   - $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $r = \frac{mg}{k}$, esiste sempre, stabile per $\frac{ka}{mg} > -1$
   - $\theta = \sin^{-1}\frac{ka}{mg}$, $r = -a$, esiste per $\left|\frac{ka}{mg}\right| < 1$, sempre instabile

3. Per la prima posizione si ha

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega_2^2 &= \frac{m^2g^2k}{Ik^2 + m^3g^2}\left(1 - \frac{ka}{mg}\right) \end{aligned}$$

mentre per la seconda

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega_2^2 &= \frac{m^2g^2k}{Ik^2 + m^3g^2}\left(1 + \frac{ka}{mg}\right) \end{aligned}$$

Esercizio 3.

1.

$$S(q, P, t) = \frac{q^2}{2} - \frac{3}{4}\frac{P^2}{q^3} - \frac{1}{2}P^2 t.$$

2.

$$
\begin{aligned}
Q &= \mp\left(q^{-1}+\frac{2}{3}q^2 t\right)(q-p)^{1/2}\\
P &= \pm\frac{2}{3}q^2\,(q-p)^{1/2}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
q &= -\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\frac{1}{(Q/P+t)^{1/3}}\\
p &= \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}P^2\,(Q/P+t)^{4/3}-\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\frac{1}{(Q/P+t)^{1/3}}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
q(t) &= -(3/2)^{1/3}\,(1+t)^{-1/3}\\
p(t) &= (3/2)^{1/3}\left[(1+t)^{4/3}-(1+t)^{-1/3}\right].
\end{aligned}
$$

Esercizio 4.

1.

$$
T_1=\frac{v_B T}{v_B-v_A},\qquad L_1=v_A T_1
$$

2.

$$
T_{2A}=\gamma_A\tau_2\qquad T_{2B}=\gamma_B\tau_2+T\qquad L_{2A}=v_A\gamma_A\tau_2\qquad L_{2B}=v_B\gamma_B\tau_2
$$

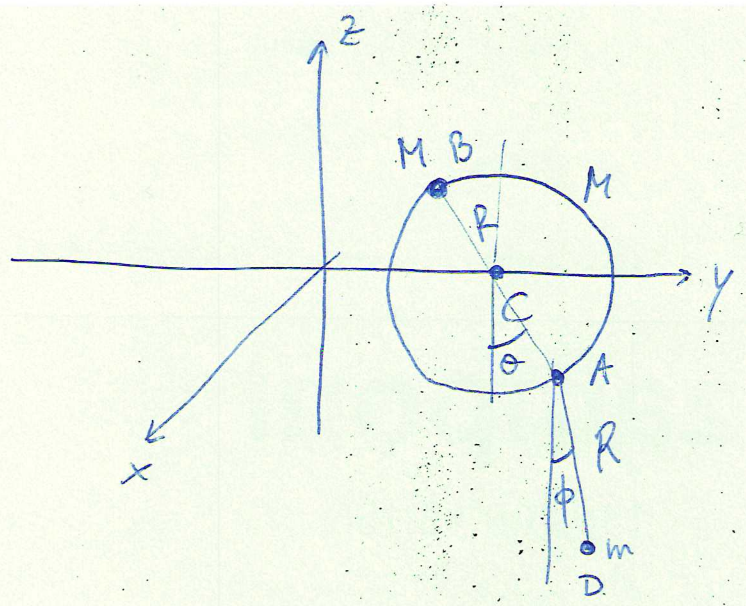
3.

$$
\begin{aligned}
E_A &= (cT_{2A},L_{2A},0,0)=(15,9,0,0)ly && E_B=(cT_{2B},L_{2B},0,0)=(21,16,0,0)ly\\
\Delta E &= (c\Delta T,\Delta L,0,0)=(6,7,0,0)ly && (\Delta E)^2=-13<0\\
0 &= c\Delta T'=\gamma(c\Delta T-\beta_x\Delta L) && \Rightarrow\qquad \beta_x=\frac{c\Delta T}{\Delta L}=\frac{6}{7}
\end{aligned}
$$

4.

$$
\beta_y<\sqrt{1-\beta_x^2}=\frac{\sqrt{13}}{7}
$$

1



1.

Senza vincoli

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{z}_D^2 + \dot{y}_D^2) + \frac{1}{2} M (\dot{z}_B^2 + \dot{y}_B^2) + \frac{1}{2} M (\dot{z}_C^2 + \dot{y}_C^2)$$

$$+ \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 - m g z_D - M g z_B - M g z_C$$

Vincoli e coordinate

$$\begin{cases} z_C = 0 \\ y_C = y \end{cases} \qquad \begin{cases} z_B = + R\cos\theta \\ y_B = y - R\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} z_D = - R\cos\theta - R\cos\phi \\ y_D = y + R\sin\theta + R\sin\phi \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \Big[\dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + 2R^2 \sin\theta \sin\phi\, \dot{\theta}\dot{\phi} + 2R^2 \cos\theta\cos\phi\, \dot{\theta}\dot{\phi}$$
$$+ 2\dot{y} R\cos\theta\, \dot{\theta} + 2\dot{y} R \cos\phi\, \dot{\phi} \Big]$$
$$+ \frac{1}{2} M \Big[\dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{y}\cos\theta\, \dot{\theta} \Big]$$
$$+ \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2$$
$$+ m g \big[+ R\cos\theta + R\cos\phi \big] - M g R \cos\theta$$

2. La Lagrangiana non dipende da $t \Rightarrow H = p_y \dot{y} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L}$ è conservata

non dipende da $y \Rightarrow p_y = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{y}$ è conservato

(2) $$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2(I+mr^2)} + mg(a+r)\sin\theta + \frac{K}{2}r^2$$

1. $$\begin{cases} \dot p_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = +\dfrac{p_\theta^2\, 2mr}{2(I+mr^2)^2} - mg\sin\theta - Kr \\[2ex] \dot r = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot p_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -mg(a+r)\cos\theta \\[2ex] \dot \theta = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{I+mr^2} \end{cases}$$

2. Equilibrio

$$+mg\sin\theta + Kr = 0$$

$$mg(a+r)\cos\theta = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r = -a \\ \cos\theta = 0 \\ \Downarrow \\ \theta = \pm\pi/2 \end{array} \right.$$

(A,B) $\theta = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -\frac{mg}{K}\sin\theta = \mp\frac{mg}{K}$

$\sin\theta = \pm 1$

(C,D) $r = -a \Rightarrow \sin\theta = \frac{Ka}{mg}$

Stabilità $V(r,\theta) = mg(a+r)\sin\theta + \frac{Kr^2}{2}$

$$\hat K = \begin{pmatrix} K & mg\cos\theta \\ mg\cos\theta & -mg(a+r)\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\hat{K}_{AB} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \mp mg\left(a \mp \frac{mg}{K}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mp mga\left(1 \mp \frac{mg}{Ka}\right) \geq 0 \qquad \mp\left(1 \mp \frac{mg}{Ka}\right) \geq 0$$

A) $-1 + \frac{mg}{ka} \geq 0$ $\qquad \frac{mg}{Ka} \geq 1$

B) $1 + \frac{mg}{Ka} \geq 0$ $\qquad$ sempre

$$\hat{K}_{CD} = \begin{pmatrix} K & mg\cos\theta \\ mg\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Tr}\,\hat{K} = K \geq 0$

$\det\hat{K} = -mg\cos^2\theta \leq 0$

<u>Instabili</u>

3. <u>Oscillazioni</u> $\quad$ B: $r = \frac{mg}{K}$, $\theta = -\pi/2$

$$H \approx \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2\left[I + \frac{m^3g^2}{k^2}\right]} + \frac{1}{2}k\,\delta r^2 + \frac{1}{2}mga\left(1 + \frac{mg}{Ka}\right)\delta\theta^2$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \omega_\theta = \sqrt{\frac{mga\left(1 + \frac{mg}{Ka}\right)}{I + \frac{m^3g^2}{k^2}}}$$

③ $$H(p,q) = \frac{2}{9} q^4 (p - q)$$

$$S(q, P, t) = W(q, P) - \frac{1}{2} P^2 t$$

1. $$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2} P^2 = -H = -\frac{2}{9} q^4 \left(\frac{\partial W}{\partial q} - q \right)$$

$$\frac{P^2}{2} = \frac{2}{9} q^4 \left(\frac{\partial W}{\partial q} - q \right) \qquad \frac{9P^2}{4q^4} + q = \frac{\partial W}{\partial q}$$

$$\cancel{S(q,P,t)} = W(q, P) = \frac{q^2}{2} - \frac{3}{4} P^2 q^{-3}$$

2. $$\begin{cases} Q = \dfrac{\partial S}{\partial P} = -\dfrac{3}{2} P q^{-3} - P t \quad \Rightarrow \quad P = -\dfrac{Q}{\left(t + \frac{3}{2} q^{-3}\right)} \\ p = \dfrac{\partial W}{\partial q} = q + \dfrac{9P^2}{4q^4} \end{cases}$$

$$\frac{4q^4}{9}(p - q) = P^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} P = \pm \dfrac{2q^2}{3} \sqrt{p - q} \\ Q = \mp \left(\dfrac{3}{2q^3} + t \right) \dfrac{2q^2}{3} \sqrt{p - q} \end{cases}$$

$$\frac{3}{2q^3} + t = -\frac{Q}{P} \qquad \frac{3}{2q^3} = -t - \frac{Q}{P} \qquad q^3 = -\frac{3}{2\left(t + \frac{Q}{P}\right)}$$

$$\begin{cases} q = -\sqrt[3]{\dfrac{3}{2(t + Q/P)}} \\ p = -\left[\dfrac{3}{2\left(t + \frac{Q}{P}\right)} \right]^{1/3} + \dfrac{9P^2}{4\left(\dfrac{3}{2(t + Q/P)} \right)^{4/3}} \end{cases}$$

3. $\quad p_0 = 0, \quad q_0 = -\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}$

$$\begin{cases} P_0 = \pm \frac{2}{3}|q_0|^{5/2} \\ Q_0 = \cancel{0} - P_0\left(0 + \frac{3}{2q_0^3}\right) = P_0 \end{cases}$$

$$q_t = -\left(\frac{3}{2(t+1)}\right)^{1/3} = -\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}(t+1)^{-1/3}$$

$$p_t = -\left(\frac{3}{2(t+1)}\right)^{1/3} + \frac{\cancel{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)|q_0|^5}{\cancel{4}\left(\frac{3}{2(t+1)}\right)^{4/3}}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}}(1+t)^{4/3} - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}(1+t)^{-1/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left[(1+t)^{4/3} - (1+t)^{-1/3}\right]$$

CHECK RISULTATO

$$H(p,q) = \frac{2}{9}q^4(p-q)$$

$$\begin{cases} \dot q = +\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{2}{9}q^4 \\ \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{8}{9}q^3(p-q) + \frac{2}{9}q^4 \end{cases}$$

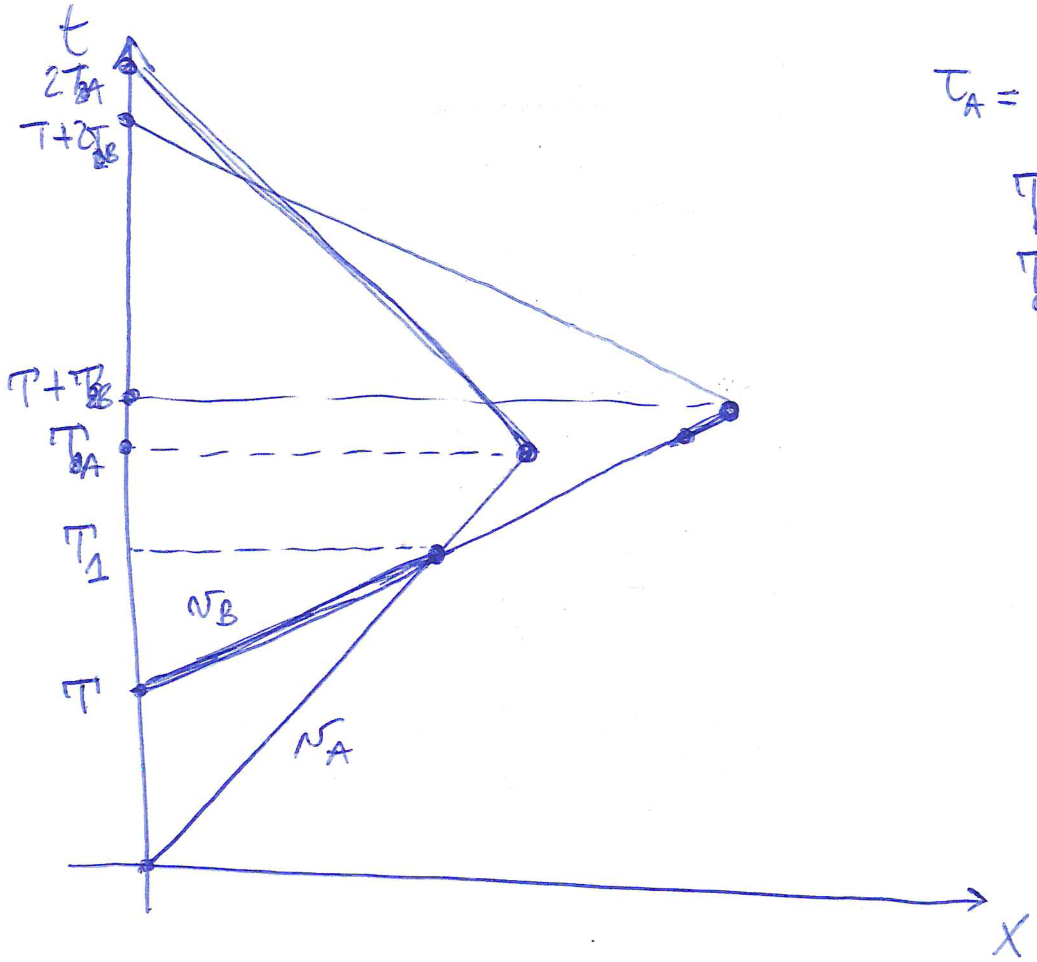
$$\dot q = +\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\frac{1}{3}\cancel{(t+1)^{-4/3}} = \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3}\cancel{(t+1)^{-4/3}} \qquad \text{ok.}$$

$$\dot p = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\left[\frac{4}{3}(1+t)^{1/3} + \frac{1}{3}(1+t)^{-4/3}\right] = +\frac{8}{9}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{t+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}(1+t)^{4/3}$$

$$+\frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3}(t+1)^{-4/3}$$

ok

4



$\tau_A = \tau_B = \tau_2$

$T_{2A} = \gamma_A \tau_2$

$T_{2B} = \gamma_B \tau_2$

1. $v_A T_1 = v_B (T_1 - T) \Rightarrow (v_B - v_A) T_1 = v_B T$

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{v_B T}{(v_B - v_A)} \\ L_1 = v_A T_1 = \dfrac{v_A v_B T}{v_B - v_A} \end{cases}$$

2. $T_{2A} = \gamma_A \tau_2 \qquad L_{2A} = v_A \gamma_A \tau_2$

$T_{2B} = T + \gamma_B \tau_2 \qquad L_{2B} = v_B \gamma_B \tau_2$

3. $\frac{v_A}{c} = \frac{3}{5}$ $\frac{v_B}{c} = \frac{4}{5}$ $T = 1$ $\tau_2 = 12$

$$\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1-9/25}} = \frac{5}{4} \qquad \gamma_B = \frac{5}{3}$$

$$E_A = (cT_{2A}, L_{2A}) = \left(\frac{5}{4}\cdot 12, \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4}\cdot 12\right) = (15, 9)$$

$$E_B = (cT_{2B}, L_{2B}) = \left(1 + \frac{5}{3}\cdot 12, \frac{4}{5}\frac{5}{3}12\right) = (21, 16)$$

$\Delta S = (6, 7, 0, 0)$ $\Delta s^2 = 36 - 49 = -13$ eventi di <u>tipo tempo</u>

<u>Condizione di simultaneità:</u>

$$\cancel{\gamma_w}\left(c T_{2A} - \frac{w}{c^2} L_{2A}\right) = \cancel{\gamma_w}\left(c\, T_{2B} - \frac{w}{c} L_{2B}\right)$$

$$15 - \frac{w}{c} 9 = 21 - \frac{w}{c} 16$$

$$7\frac{w}{c} = 6 \Rightarrow \frac{w}{c} = \frac{6}{7}$$

<u>Stesso punto nello spazio</u>

$$\gamma_w (L_{2A} - w\, T_{2A}) = \gamma_w (L_{2B} - w\, T_{2B})$$

$$w = \frac{L_{2B} - L_{2A}}{T_{2B} - T_{2A}} = \frac{7}{6} > c$$ <u>impossibile</u>.

4.

$$\begin{cases} x' = \gamma_w (x - w t) \\ t' = \gamma_w \left(t - \frac{w}{c^2} x\right) \\ y' = y \end{cases}$$

w componente lungo x

$$\begin{cases} x'' = x' \\ t'' = \gamma_u \left(t' - \frac{u}{c^2} y'\right) \\ y'' = \gamma_u (y' - u t') \end{cases}$$

u componente lungo y

$$t''_A = \gamma_u \left(\gamma_w\left(T_{2A} - \frac{w}{c^2} L_{2A}\right)\right) = \gamma_u\left(\gamma_w\left(T_{2B} - \frac{w}{c^2} L_{2B}\right)\right)$$

Dunque la condizione di simultaneità non dipende da u.

La sola condizione è $u^2 + w^2 \leq c^2$

$$u^2 \leq c^2\left(1 - \frac{36}{49}\right) = c^2 \frac{13}{49} \qquad \frac{u}{c} \leq \sqrt{\frac{13}{49}}$$