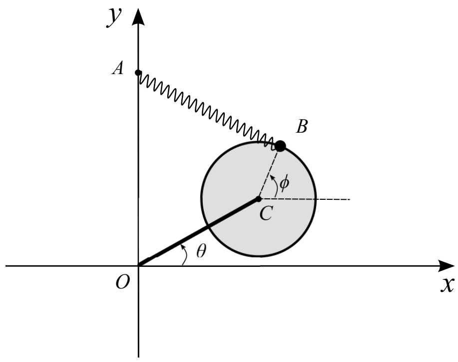
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 23 gennaio 2024
Proff A. Crisanti, M. Papinutto, F. Zamponi

Esercizio 1 [6 punti].



Un'asta rigida di massa M e lunghezza $2a$ può ruotare senza attrito in un piano verticale intorno al suo estremo O vincolato nell'origine del sistema di riferimento Oxy. All'estremo opposto C dell'asta è fissato il centro di un disco di raggio a e massa trascurabile. Il disco può ruotare senza attrito intorno al suo centro. Sul bordo del disco è fissata una massa puntiforme m, punto B in figura. La massa è soggetta alla forza elastica $\vec{F} = -k\overrightarrow{AB}$ di costante elastica k verso il punto $A = (0, 4a)$. Oltre alla forza elastica, sul sistema agisce la forza di gravità.

Si utilizzino come coordinate generalizzate l'angolo θ che l'asta forma con l'asse x e l'angolo ϕ che il raggio $\overline{CB}$ forma con un asse orizzontale passante per C.

Si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema;
2. Le equazioni del moto.
3. Verificare che la Lagrangiana è invariante sotto la trasformazione $(\theta, \phi) \to (\pi - \theta, \pi - \phi)$. Esiste una grandezza conservata associata a tale trasformazione?

Esercizio 2 [8 punti]. Si consideri un sistema descritto dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\dot{\theta}, \theta, \dot{x}, x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + a\sin\theta - x^2 - 4x\cos\theta\ .$$

dove a è una costante positiva: $a > 0$.

Si chiede:

1. L'Hamiltoniana del sistema.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità per tutti i valori ammessi di a.
3. Le frequenze delle piccole oscillazioni di tutti i punti di equilibrio stabile per tutti i valori ammessi di a.

Esercizio 3 [8 punti]. Si consideri la seguente trasformazione

$$\begin{cases} Q = p^a \cos q, \\ P = -2p^b \sin q. \end{cases}$$

Si chiede:

1. Determinare i valori di a e b tali che la trasformazione sia canonica.
2. Applicare la trasformazione canonica trovata alla Hamiltoniana $H(q, p) = -p\sin(2q)$ e determinare la corrispondente Hamiltoniana $K(Q, P)$.
3. Scrivere e risolvere le equazioni di Hamilton per Q e P.
4. Utilizzare la trasformazione canonica trovata per risolvere le equazioni del moto con le condizioni iniziali $q(0) = \pi/4$ e $p(0) = 1$.

Esercizio 4 [8 punti]. Due astronavi partono all'istante $t = 0$ dalla terra (situata a riposo nell'origine di un sistema di riferimento $R : Oxyz$), avendo sincronizzato gli orologi di bordo con quello sulla terra. L'astronave A si dirige in direzione positiva dell'asse x con velocità v_A mentre l'astronave B si dirige lungo la bisettrice del primo quadrante del piano xy ($x = y$, $z = 0$) con velocità v_B. Dopo un tempo $\bar{t}/2$, l'astronave A cambia istantaneamente direzione del moto e si dirige parallelamente all'asse y mantenendo il modulo della velocità v_A inalterato (evento E_1). Al tempo $\bar{t}$ le due astronavi si incontrano (evento E_2).

Si chiede:

1. Qual è la velocità che l'astronave B non deve superare, affinché le due astronavi possano incontrarsi al tempo $\bar{t}$?

2. Siano τ_A e τ_B i tempi propri corrispondenti all'istante $\bar{t}$ misurati rispettivamente sull'astronave A e sull'astronave B. Quanto valgono v_A e v_B se $\tau_B = \sqrt{2}\tau_A$?

3. Assumendo che le astronavi si muovano con le velocità calcolate al punto precedente, indicare per quali valori di $\bar{t}$ esiste un sistema di riferimento R' in cui E_1 ed E_2 avvengono nello stesso punto. Per questi valori, trovare la velocità di R' rispetto al sistema di riferimento R di partenza.

4. Qual è la velocità v'_B dell'astronave B misurata nel riferimento R'?

Soluzioni

Esercizio 1.

1. La Lagrangiana è $L = T - V$ con

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{3}(2M+6m)\,a^2\dot\theta^2 + \frac{ma^2}{2}\dot\phi^2 + 2ma^2\cos(\theta-\phi)\,\dot\theta\dot\phi \\
V &= (Mg+2mg-8ka)a\sin\theta + (mg-4ka)a\sin\phi + 2ka^2\cos(\theta-\phi) + \text{const.},
\end{aligned}
$$

per cui

$$
\begin{aligned}
L =& \frac{1}{3}(2M+6m)\,a^2\dot\theta^2 + \frac{ma^2}{2}\dot\phi^2 + 2ma^2\cos(\theta-\phi)\,\dot\theta\dot\phi \\
&- (Mg+2mg-8ka)a\sin\theta - (mg-4ka)a\sin\phi - 2ka^2\cos(\theta-\phi) + \text{const.}.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\frac{2}{3}(2M+6m)\,\ddot\theta + 2m\cos(\theta-\phi)\,\ddot\phi + 2m\sin(\theta-\phi)\,\dot\phi^2 = -k(\lambda_1+2\lambda_2-8)\cos\theta + 2k\sin(\theta-\phi),
$$

$$
m\ddot\phi + 2m\cos(\theta-\phi)\,\ddot\theta - 2m\sin(\theta-\phi)\,\dot\theta^2 = -k(\lambda_2-4)\cos\phi - 2k\sin(\theta-\phi),
$$

dove $\lambda_1 = Mg/ka$ e $\lambda_2 = mg/ka$.

3. La simmetria è discreta per cui non vi sono grandezze conservate associate.

Esercizio 2.

1.

$$
H(p_\theta,\theta,p_x,x) = \frac{2}{4-\sin^2\theta}\left[p_x^2 + p_\theta^2 + p_x p_\theta \sin\theta\right] - a\sin\theta + x^2 + 4x\cos\theta\ .
$$

2. I punti di equilibrio sono

- $\theta = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, esiste sempre; stabile per $a > 8$.
- $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $x = 0$, esiste sempre; instabile.
- $\theta = \sin^{-1}\frac{a}{8}$, $x = \pm\frac{1}{4}\sqrt{64-a^2}$, con $x < 0$ se $0 \le \theta \le \pi/2$ e $x > 0$ se $\pi/2 \le \theta \le \pi$, esiste per $0 < a < 8$; sempre stabile quando esiste.

3. Per il punto $\theta = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ si ha

$$
\omega_\pm^2 = \frac{2}{3}\left[(a-2) \pm \sqrt{a^2-10a+52}\right]
$$

mentre per $\theta = \sin^{-1}\frac{a}{8}$, $x = \pm\frac{1}{4}\sqrt{64-a^2}$ si ha

$$
\begin{aligned}
\omega_1^2 &= 8 \\
\omega_2^2 &= 8\frac{64-a^2}{256-a^2}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.

1.

$$
a = b = \frac{1}{2}.
$$

2.

$$
K(Q,P) = QP.
$$

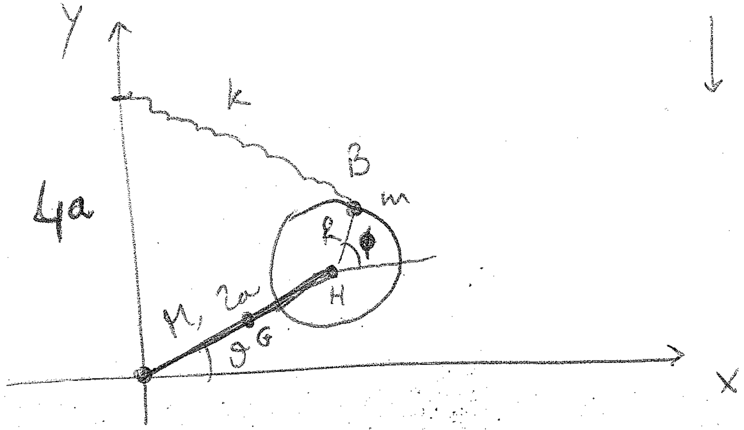
3.
$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial Q} = Q, \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial P} = -P, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} Q(t) = Q_0\, e^{t}, \\ P(t) = P_0\, e^{-t}. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} q(t) = \arctan(e^{-2t}), \\ p(t) = \cosh(2t). \end{cases}$$

Esercizio 4.

1. $v_B < \frac{c}{\sqrt{2}}$;
2. $v_A = \sqrt{\frac{2}{3}}c$, $v_B = \frac{c}{\sqrt{3}}$;
3. $\exists\, R' \,\forall\, \bar{t}$, $\beta = \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$;
4. $v'_B = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}c, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}c, 0\right)$.

$\boxed{Ex. 1}$



$\downarrow g$

$$I = M \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} dx \, x^2 = \frac{M}{a} \frac{a^3}{3} = \frac{a^2}{3} M$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} \frac{Ma^2}{3} \dot{\vartheta}^2 - Mg\, y_G \longleftarrow \boxed{\text{barra}}$$

$$+ \frac{1}{2} m (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) - mg\, y_B - \frac{k}{2}\left(x_B^2 + (y_B - 4a)^2\right) \longleftarrow \boxed{\text{ponto}}$$

$$\begin{cases} x_G = a \cos\vartheta \\ y_G = a \sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B = 2a \cos\vartheta + a \cos\phi \\ y_B = 2a \sin\vartheta + a \sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_H = 2a \cos\vartheta \\ y_H = 2a \sin\vartheta \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{Ma^2}{3} \dot{\theta}^2 - Mg\, a \sin\theta$$

$$+ \frac{1}{2} m \left(4a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \dot{\phi}^2 + (\sin\theta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi)\, \dot{\theta} \dot{\phi} \right) - mg \left(2a \sin\theta + a \sin\phi \right)$$

$$- \frac{K}{2} \Big(\cancel{4a \cos^2\theta} + \cancel{a^2 \cos^2\phi} + 4a^2 \cos\theta \cos\phi + \cancel{4a \sin^2\theta} + \cancel{a^2 \sin^2\phi} + \cancel{16 a^2}$$

$$- 16 a^2 \sin\theta - 8 a^2 \sin\phi + 4a^2 \sin\theta \sin\phi \Big)$$

$$= \frac{1}{2} \left(M + 4m + \frac{M}{3} \right) a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m \cos(\theta - \phi)\, \dot{\theta} \dot{\phi}$$

$$- Mga \sin\theta - mga \left(2 \sin\theta + \sin\phi \right) - 2Ka^2 \left(\cos(\theta - \phi) - 2 \sin\phi - 4 \sin\theta \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{4M}{3} + 4m \right) a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m \cos(\theta - \phi)\, \dot{\theta} \dot{\phi}$$

$$- (Mg + 2mg - 8Ka)\, a \sin\theta - (mg + 4Ka)\, a \sin\phi - 2Ka^2 \cos(\theta - \phi)$$

Per le equazioni del moto e la risposta alla domanda 3 si vedano le soluzioni

Esercizio 2.

1. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_\theta \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \qquad\qquad g = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sin\theta \\ -\frac{1}{2}\sin\theta & 1 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} p_x \\ p_\theta \end{pmatrix} \qquad\qquad g^{-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$H(p_\theta, \theta, p_x, x) = \frac{2(p_x^2 + p_\theta^2 + p_x p_\theta \sin\theta)}{4 - \sin^2\theta)} - a\sin\theta + x^2 + 4x\cos\theta \ .$$

2. I punti di equilibrio sono soluzioni di $x = -2\cos\theta$ e

$$\cos\theta = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \sin\theta = \frac{a}{8} \ .$$

La matrice di stabilità è

$$k = \begin{pmatrix} 2 & -4\sin\theta \\ -4\sin\theta & a\sin\theta - 4x\cos\theta \end{pmatrix} \ .$$

Otteniamo dunque due tipologie di punti di equilibrio, ciascuna con due punti:

a. $x = 0, \theta = \pm\pi/2$ dunque $\sin\theta = \pm 1$ e $k = \begin{pmatrix} 2 & \mp 4 \\ \mp 4 & \pm a \end{pmatrix}$. Il punto con $\theta = \pi/2$ è stabile per $a > 8$, quello con $\theta = -\pi/2$ è sempre instabile.

b. Per $a < 8$ ci sono due soluzioni ulteriori con $\sin\theta = a/8$ dunque $x = -2\cos\theta = \mp 2\sqrt{1 - a^2/64}$ e $k = \begin{pmatrix} 2 & -a/2 \\ -a/2 & 8 \end{pmatrix}$. Queste due soluzioni sono stabili per $a < 8$.

3. Le frequenze delle piccole oscillazioni sono date dalle soluzioni di $\det(k - \lambda g) = 0$, con $\omega = \sqrt{\lambda}$. Ricordiamo che la matrice g va calcolata nel punto di equilibrio.

Per $a > 8$ abbiamo un solo equilibrio stabile con $x = 0$ e $\theta = \pi/2$. La matrici sono $k = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ e $g = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Le frequenze sono $\omega_\pm^2 = \frac{2}{3}\left[a - 2 \pm \sqrt{a^2 - 10a + 52}\right]$.

Per $a < 8$ abbiamo due equilibri stabili con $\sin\theta = a/8$ e $x = -2\cos\theta = \mp 2\sqrt{1 - a^2/64}$. Le matrici sono $k = \begin{pmatrix} 2 & -a/2 \\ -a/2 & 8 \end{pmatrix}$ e $g = \begin{pmatrix} 1 & -a/16 \\ -a/16 & 1 \end{pmatrix}$. Le frequenze sono $\omega_+^2 = 8$ e $\omega_-^2 = \frac{8(a^2-64)}{a^2-256}$.

$\boxed{\text{Ex. 2}}$

Seguono alcuni dettagli sull'esercizio 2

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + a\sin\vartheta - x^2 - 4x\cos\vartheta$$

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - \dfrac{\dot{\vartheta}}{2}\sin\vartheta \\ p_\vartheta = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = \dot{\vartheta} - \dfrac{\dot{x}}{2}\sin\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_\vartheta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sin\vartheta \\ -\frac{1}{2}\sin\vartheta & 1 \end{pmatrix}}_{= g} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\sin^2\vartheta} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\sin\vartheta \\ \frac{1}{2}\sin\vartheta & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} p_x \\ p_\vartheta \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\vartheta\right)} (p_x \ p_\vartheta) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\sin\vartheta \\ \frac{1}{2}\sin\vartheta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_\vartheta \end{pmatrix} - a\sin\vartheta + x^2 + 4x\cos\vartheta$$

$$= \frac{2}{4 - \sin^2\vartheta}\left[p_x^2 + p_\vartheta^2 + p_x p_\vartheta \sin\vartheta \right] - a\sin\vartheta + x^2 + 4x\cos\vartheta$$

[NB $\vartheta \to y$] (4)

$$T(\dot{x}, \dot{y}, y)$$

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x, \dot{y}, y) = \quad - V(x,y)$$

$$V(x,y) = -a \sin y + x^2 + 4x \cos y \qquad \lambda > 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x + 4\cos y = 0 \qquad x = -2\cos y$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -a\cos y - 4x \sin y = 0$$

$$-a \cos y + 8 \sin y \cos y = 0$$

$\nearrow$ $\cos y = 0$

$\searrow$ $\sin y = \frac{a}{8}$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -4\sin y \\ -4 \sin y & a \sin y - 4x\cos y \end{pmatrix}$$

(A) $\begin{cases} x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases}$ $\quad y = \pm\pi/2 \quad \sin y = \pm 1$ $\qquad K = \begin{pmatrix} 2 & \mp 4 \\ \mp 4 & \pm a \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Tr}\, K = 2 \pm a$$

$$\det K = \pm 2a - 16$$

(+) $a > 8$

(−) mai

(B) $\sin y = \frac{a}{8} \qquad \cos y = \pm\sqrt{1 - \frac{a^2}{64}} \qquad x = \mp 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{64}}$

(J)

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -a/2 \\ -a/2 & \frac{a^2}{8} + 8\left(1 - \frac{a^2}{64}\right) = 8 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Tr}\, K = 10$

$\det K = 16 - \frac{a^2}{4} > 0 \Rightarrow a^2 < 64 \Rightarrow a < 8$

<u>Stabilità</u>

$a < 8$ $\quad \sin y = \frac{a}{8}$ $\quad \cos y = \pm\sqrt{1 - \frac{a^2}{64}} = -\frac{x}{2}$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -a/2 \\ -a/2 & 8 \end{pmatrix}$$

$a > 8$

$x = 0$

$y = \pi/2$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$$

Ex. 3

$$\begin{cases} Q = p^a \cancel{\sin q} \cos q \\ P = -2 p^b \cancel{\cos q} \sin q \end{cases}$$

(1) $$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} =$$

$$= -p^a \sin q \left(-2b\, p^{b-1} \sin q\right) + \left(a p^{a-1} \cos q\right) 2 p^b \cos q$$

$$= +2b\, p^{a+b-1} \cos^2 q + 2 p^{a+b-1} \sin^2 q$$

$$= +2b\, p^{a+b-1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad a+b-1 = 0 \Rightarrow a = 1-b$$

$$+2b = 1 \Rightarrow \boxed{b = +\frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2}}$$

(2) $$H = -p \sin(2q)$$

$$= -p\, 2 \sin q \cos q$$

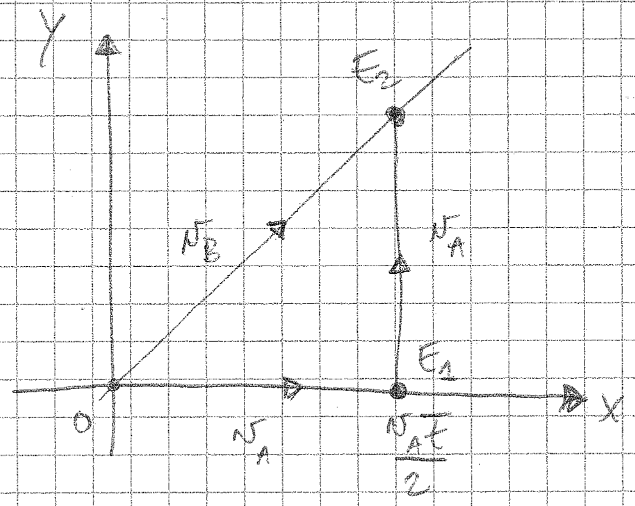
$$Q = \sqrt{p} \cos q$$
$$P = -2\sqrt{p} \sin q$$

$$K = PQ$$

(3) $$\begin{cases} \dot{P} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q} = -P & \Rightarrow \quad P(t) = P(0)\, e^{-t} \\ \dot{Q} = \dfrac{\partial K}{\partial P} = Q & \Rightarrow \quad Q(t) = Q(0)\, e^{t} \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} q_0 = \pi/4 \\ p_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} P_0 = -2\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \\ Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan q = -\dfrac{P}{2Q} = e^{-2t} \\ p = Q^2 + P^2/4 \end{cases} \quad \begin{cases} q = \arctan\left(e^{-2t}\right) \\ p = \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \end{cases}$$

Ex. 4



1. $v_B \bar{t} = \sqrt{2}\, \frac{v_A \bar{t}}{2} \Rightarrow v_B = \frac{v_A}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_A = \sqrt{2}\, v_B$

$\Rightarrow v_B < c/\sqrt{2}$

2. $\tau_A = \frac{\bar{t}}{\gamma_A}$ $\quad \tau_B = \frac{\bar{t}}{\gamma_B} = \sqrt{2}\, \tau_A = \sqrt{2}\, \frac{\bar{t}}{\gamma_A}$

$$\frac{1}{\gamma_B} = \sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}} = \sqrt{2}\, \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}$$

$$1 - \frac{v_B^2}{c^2} = 2 - \frac{2 v_A^2}{c^2} = 2 - 4\frac{v_B^2}{c^2}$$

$$3\frac{v_B^2}{c^2} = 1 \quad v_B^2 = \frac{1}{3} c^2 \quad v_B = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2}{3}}\, c$$

$$\gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}}} = \sqrt{3}$$

3. $$E_1 = \left(c\frac{\bar{t}}{2}, \frac{v_A \bar{t}}{2}, 0, 0 \right)$$

$$E_2 = \left(c\bar{t}, \frac{v_A \bar{t}}{2}, \frac{v_A \bar{t}}{2}, 0 \right)$$

R' va da E_1 a E_2 in un tempo $t/2$, e' il riferimento di A $\Rightarrow$ $\beta = \left(0, \frac{v_A}{c}, 0\right) = \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$

4.

$$\begin{cases} x_B = c\frac{1}{\sqrt{6}}\, t \\ y_B = c\frac{1}{\sqrt{6}}\, t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_B = x_B \\ y'_B = \gamma_A\left(y_B - \sqrt{\frac{2}{3}}\, ct\right) \\ t' = \gamma_A\left(t - \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{y_B}{c}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_B = \frac{c}{\sqrt{6}}\, t \\ y'_B = \gamma_A t\left(\frac{c}{\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\, c\right) \\ t' = \gamma_A t\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{cases}$$

$$t' = t\sqrt{3} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{1}{9}}\right) = t\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} = t\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x'_B = c\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{3}\, t'}{2} = \frac{c}{2\sqrt{2}}\, t'$$

$$y'_B = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2}\, t' c\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = c t' \overbrace{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}^{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$$