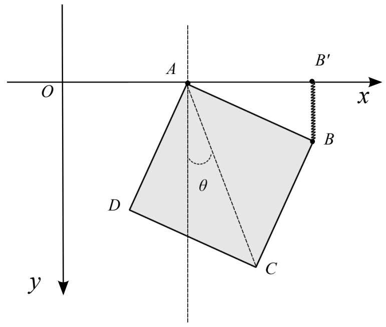
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 10 luglio 2024
Proff A. Crisanti, M. Papinutto, F. Zamponi

Esercizio 1 [6 punti].



Una lamina quadrata $ABCD$, omogenea di massa m e diagonale $\overline{AC} = 2a$ si muove in un piano verticale Oxy con il vertice A vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse x. All'estremo B, vedi figura, è applicata una forza elastica $\vec{F}_A = -k\,\overrightarrow{BB'}$, con B' proiezione ortogonale del vertice B sull'asse x. Sulla lastra, oltre alla forza elastica, agisce la forza peso.

Utilizzando come coordinate generalizzate la coordinata x del vertice A e l'angolo $\theta \in (-\pi, \pi]$ che la diagonale $\overrightarrow{AC}$ forma con l'asse verticale passante per il vertice A della lastra come mostrato in figura, si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema.
2. Le equazioni del moto Lagrangiane.
3. Individuare gli integrali primi del sistema.

PS: Si ricordi che il momento d'inerzia di una lamina quadrata di lato L e massa m rispetto all'asse ortogonale al piano della lamina e passante per il centro di massa è uguale a $I = \frac{mL^2}{6}$.

Esercizio 2 [8 punti]. Si consideri il sistema descritto dalla Hamiltoniana

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \lambda(x^2 + z^2) + \frac{1}{2}y^2 - \ln(1 + x^2 + y^2)$$

dove λ è un parametro.

Si chiede:

1. Le equazioni di Hamilton.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità al variare del parametro reale $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1/2$.
3. Preso $\lambda > 1/2$ le frequenze delle piccole oscillazioni al punto, o ai punti, di equilibrio stabile.

Esercizio 3 [8 punti]. Sia data la seguente Hamiltoniana

$$H(q, p) = p^2 + \frac{1}{2}e^{2q} + \frac{p^4}{2}e^{-2q} \ ,$$

e la trasformazione

$$\begin{cases} Q &= e^{\alpha q} + p^2 e^{-q} \ , \\ P &= \arctan(p e^{-q}) \ , \end{cases}$$

con α parametro reale.

Si chiede:

1. Determinare i valori del parametro α affinchè la trasformazione sia canonica.
2. Determinare la funzione generatrice $G(q, P)$ della trasformazione.
3. Utilizzare la trasformazione canonica per risolvere le equazioni del moto per (q, p) ottenute a partire dalla Hamiltoniana data con le condizioni iniziali $p(t = 0) = 0$ e $q(t = 0) = \log 2$.
4. Verificare esplicitamente che le soluzioni ottenute verificano le equazioni di Hamilton per (p, q).

Esercizio 4 [8 punti]. Un'astronave viaggia dal pianeta A (situato a riposo nell'origine del sistema di riferimento R) in direzione della stazione spaziale B (anch'essa a riposo nel sistema di riferimento R nel punto di coordinate (L,0,0)), partendo dal pianeta A all'istante $t = \tau = 0$ (t essendo il tempo misurato nel sistema di riferimento R e τ il tempo proprio a bordo dell'astronave, denominato sistema di riferimento R'). Lo scafo dell'astronave presenta una piccolissima perdita per cui l'aria all'interno si esaurirà in un intervallo di tempo $\tau_1 = \frac{\sqrt{5}L}{2c}$.

1. Quale è la velocità minima v_{min} per la quale l'astronave riesce ad arrivare su B prima della fine dell'aria?

Se al tempo $t = 0$ l'astronave (che si trova nel punto (0,0,0) di R) stesse viaggiando con velocità v_1 verso B e B (che si trova nel punto (L,0,0) di R) stesse viaggiando con velocità $v_2 = -2v_1$ verso A:

2. qual è la velocità v_2' nel riferimento R'?
3. ragionando nel sistema R si trovi la velocità minima v_1^{min} che deve avere l'astronave affinchè riesca ad arrivare su B prima della fine dell'aria;
4. quali sono le coordinate in R' dell'evento che corrisponde alla stazione spaziale B situata al tempo $t = 0$ e nel punto (L,0,0) di R;
5. ragionando nel sistema R' si trovi la velocità minima v_1^{min} che deve avere l'astronave affinchè riesca ad arrivare su B prima della fine dell'aria.

Soluzioni

Esercizio 1.

1.

$$L(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2 + 2a\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta} + \frac{4}{3}a^2\dot{\theta}^2\Big) + ka^2\Big(\frac{mg}{ka} + \sin\theta\Big)\cos\theta.$$

2.

$$\ddot{x} + a\cos\theta\,\ddot{\theta} - a\sin\theta\,\dot{\theta}^2 = 0,$$

$$m\left(\frac{4}{3}a\ddot{\theta} + \cos\theta\,\ddot{x}\right) = -ka\Big(\sin^2\theta + \frac{mg}{ka}\sin\theta - 1\Big).$$

3. La Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo ne dalla coordinata x per cui l'energia

$$E(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2 + 2a\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta} + \frac{4}{3}a^2\dot{\theta}^2\Big) - ka^2\Big(\frac{mg}{ka} + \sin\theta\Big)\cos\theta.$$

e il momento coniugato

$$p_x = m\big(\dot{x} + a\cos\theta\,\dot{\theta}\big),$$

sono integrali primi del moto.

Esercizio 2.

1.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{p_x}{m}, & \dot{p}_x &= -2\lambda x + \frac{2x}{1+x^2+y^2};\\
\dot{y} &= \frac{p_y}{m}, & \dot{p}_y &= -y + \frac{2y}{1+x^2+y^2}\\
\dot{z} &= \frac{p_z}{m}, & \dot{p}_z &= -2\lambda z.
\end{aligned}$$

2. I punti di equilibrio sono $p_x = p_y = p_z = 0$ e
   (a) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, sempre instabile.
   (b) $x = 0$, $y = \pm 1$, $z = 0$, stabile se $\lambda > 1/2$.
   (c) $x = \pm\sqrt{(1-\lambda)/\lambda}$, $y = 0$, $z = 0$, esiste solo per $0 < \lambda \leq 1$ ed è stabile se $0 < \lambda < 1/2$, instabile se $1/2 < \lambda \leq 1$.
3. Per $\lambda > 1/2$ solamente i punti in (b) sono stabili e le frequenze sono $\omega_x^2 = \frac{2\lambda - 1}{m}$, $\omega_y^2 = \frac{1}{m}$ e $\omega_z^2 = \frac{2\lambda}{m}$.

Esercizio 3.

1.

$$\alpha = 1\ .$$

2.

$$G(q,P) = e^q\tan P + \text{const.}$$

3. La trasformazione inversa è

$$\begin{cases} q = \log Q - \log(1+\tan^2 P), \\ p = \frac{Q\tan P}{1+\tan^2 P} \end{cases}$$

Usando questa, o (meglio) riconoscendo che

$$H(p,q) = \frac{1}{2}[e^q + p^2e^{-q}]^2\ ,$$

si ottiene

$$K(Q,P) = \frac{1}{2}Q^2 \ .$$

Dunque

$$Q(t) = Q_0 \ , \qquad P(t) = P_0 - Q_0\, t \ .$$

Usando la trasformazione canonica per i valori $p(0) = 0$ e $q(0) = \log 2$, si ha

$$Q_0 = 2, \qquad P_0 = 0,$$

per cui

$$\begin{cases} q(t) = \log 2 - \log[1 + \tan^2(2t)] \ , \\ p(t) = -\frac{2\tan(2t)}{1+\tan^2(2t)} \ . \end{cases}$$

4. Le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{p} = -e^{2q} + p^4 e^{-2q} \qquad \dot{q} = 2p + 2p^3 e^{-2q}$$

Ricordando che $e^{q(t)} = \frac{2}{1+\tan^2(2t)}$ si trova

$$\dot{q} = -\frac{1}{1+\tan^2(2t)} 2\tan(2t)(1+\tan^2(2t))2 = -4\tan(2t)$$

$$2p + 2p^3 e^{-2q} = -\frac{4\tan(2t)}{1+\tan^2(2t)} - 16\frac{\tan^3(2t)}{(1+\tan^2(2t))^3}\frac{(1+\tan^2(2t))^2}{4} = -4\tan(2t)$$

che verifica l'equazione per q. L'equazione per p si verifica analogamente.

Esercizio 4.

1. $\beta_{\min} = \frac{2}{3}$;
2. $$\beta_2' = -\frac{3\beta_1}{1+2\beta_1^2};$$
3. $\beta_1^{\min} = \frac{2}{7}$;
4. $(-\beta_1\gamma_1 L,\ \gamma_1 L,\ 0, 0)$ with $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$;
5. $\beta_1^{\min} = \frac{2}{7}$.