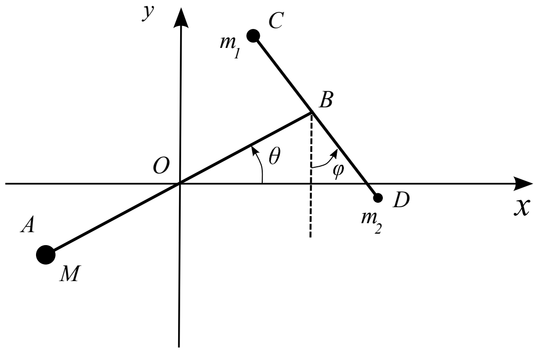
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 11 settembre 2024
Proff A. Crisanti, M. Papinutto, F. Zamponi

Esercizio 1 [6 punti].



Una sbarretta di massa trascurabile e lunghezza $\overline{AB} = 2a$ può ruotare liberamente in un piano verticale intorno al suo centro O coincidente con l'origine del sistema di riferimento Oxy, con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale ed orientato verso l'alto. All'estremità A della sbarretta è fissata una massa puntiforme M. All'altro estremo, estremo B, è fissato il centro di una seconda sbarretta di massa trascurabile e lunghezza $\overline{CD} = 2b$. La sbarretta CD può ruotare liberamente nel piano verticale intorno al suo centro. All'estremo C della seconda sbarretta è fissata una massa puntiforme di massa m_1, mentre all'estremo opposto D è fissata una terza massa puntiforme di massa m_2.

Sul sistema agisce la forza peso.

Utilizzando come coordinate generalizzate l'angolo θ che la sbarretta AB forma con l'asse x e l'angolo φ che la sbarretta CD forma con la verticale, ed orientati come in Figura, si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema.
2. La Hamiltoniana del sistema.
3. Indicare le quantità conservate nel caso $m_1 \neq m_2$ e nel caso particolare $m_1 = m_2$

Esercizio 2 [8 punti]. Si consideri il sistema descritto dalla Hamiltoniana

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2}\left[\frac{p_r^2}{1 + (r - 1/r)^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right] + \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2\theta - \lambda\right) r^2 - \ln r, \qquad r > 0,$$

dove λ è un parametro reale.

Si chiede:

1. Le equazioni di Hamilton.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità al variare del parametro reale λ.
3. La frequenza delle piccole oscillazioni intorno ai punti di equilibrio stabile del sistema.

Esercizio 3 [8 punti]. Sia data la seguente Hamiltoniana

$$H(q, p) = p^3 - \frac{q^3}{81 p^6}\ ,$$

e la trasformazione

$$\begin{cases} Q &= \frac{1}{3}\, q\, p^a\ , \\ P &= p^3\ , \end{cases}$$

con a parametro reale.

Si chiede:

1. Determinare i valori del parametro a affinchè la trasformazione sia canonica.
2. Determinare la funzione generatrice $G(q, P)$ della trasformazione.

3. Utilizzare la trasformazione canonica per risolvere le equazioni del moto per (q, p) ottenute a partire dalla Hamiltoniana data con le condizioni iniziali $p(t = 0) = 1$ e $q(t = 0) = 0$.

4. Verificare esplicitamente che le soluzioni ottenute verificano le equazioni di Hamilton per (p, q).

Esercizio 4 [8 punti]. Nel sistema di riferimento R, l'astronave A si trova al tempo $t = 0$ nell'origine del sistema di coordinate e viaggia alla velocità v_A in verso positivo lungo l'asse delle x mentre l'astronave B si trova, sempre al tempo $t = 0$, nel punto di coordinate $(-L$,0,0) e viaggia in verso positivo lungo l'asse delle x con velocità $v_B = 3v_A$. Sull'astronave A (il cui tempo proprio è indicato da τ con origine $\tau = 0$ corrispondente a $t = 0$) è presente un ordigno con timer impostato per scoppiare al tempo $\tau_1 = \frac{\sqrt{6}L}{c}$.

1. Quale è il valore minimo $v_{\min}$ di $v_A = v_B/3$ affinchè le due astronavi si incontrino prima dello scoppio dell'ordigno?

Ci si ponga adesso in un sistema di riferimento R', con assi paralleli agli assi del sistema R, che si muove rispetto ad R con velocità $V = v_A = v_B/3$ nella direzione x e la cui origine delle coordinate coincida con quella di R al tempo $t' = t = 0$:

2. quali sono le velocità v'_A e v'_B di A e B nel riferimento R'?

3. quali sono le coordinate in R' dell'evento che corrisponde all'astronave A situata al tempo $t = 0$ nel punto (0,0,0) di R? Che relazione intercorre fra t' e τ (il tempo proprio sull'astronave A)?

4. quali sono le coordinate in R' dell'evento che corrisponde all'astronave B situata al tempo $t = 0$ nel punto $(-L$,0,0) di R?

5. ragionando nel sistema R' si trovi il valore minimo $V_{\min}$ di $V = v_A = v_B/3$ (da cui dipendono v'_A e v'_B) affinchè le due astronavi si incontrino prima dello scoppio dell'ordigno.

Soluzioni

Esercizio 1.

1.

$$L(\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi)=\frac{a^2}{2}(m_1+m_2+M)\,\dot\theta^2+\frac{b^2}{2}(m_1+m_2)\,\dot\varphi^2+ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi)\,\dot\theta\dot\varphi$$
$$-\,ag(m_1+m_2-M)\sin\theta-bg(m_1-m_2)\cos\varphi.$$

2.

$$H(\theta,\varphi,p_\theta,p_\varphi)=\frac{1}{2D(\theta,\varphi)}\left[b^2(m_1+m_2)\,p_\theta^2+a^2(m_1+m_2+M)\,p_\varphi^2-2ab(m_1-m_2)\,p_\theta p_\varphi\sin(\theta-\phi)\right]$$
$$+\,ag(m_1+m_2-M)\sin\theta+bg(m_1-m_2)\cos\varphi,$$

con

$$D(\theta,\varphi)=a^2b^2\Big[(m_1+m_2)(m_1+m_2+M)-(m_1-m_2)^2\sin^2(\theta-\varphi)\Big].$$

3. Formulazione Lagrangiana:
La Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo di conseguenza l'energia generalizzata

$$\mathcal{E}(\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi)=\frac{a^2}{2}(m_1+m_2+M)\,\dot\theta^2+\frac{b^2}{2}(m_1+m_2)\,\dot\varphi^2+ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi)\,\dot\theta\dot\varphi$$
$$+\,ag(m_1+m_2-M)\sin\theta+bg(m_1-m_2)\cos\varphi,$$

è una costante del moto.

Se $m_1=m_2$ la Lagrangiana non dipende dalla variabile φ di conseguenza

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot\varphi}L=2b^2m_1\,\frac{d}{dt}\dot\varphi=0\qquad\Rightarrow\qquad\dot\varphi=costante.$$

Formulazione Hamiltoniana:
La Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo di conseguenza la Hamiltoniana è una costante del moto.

Se $m_1=m_2$ la Hamiltoniana non dipende dalla variabile φ di conseguenza

$$\dot p_\varphi=-\frac{\partial}{\partial\varphi}H=0\qquad\Rightarrow\qquad p_\varphi=costante.$$

Esercizio 2.

1.

$$\begin{aligned}\dot r&=\frac{p_r}{1+(r-1/r)^2},\\ \dot p_r&=\frac{p_r^2}{[1+(r-1/r)^2]^2}\,(r-1/r^3)+\frac{p_\theta^2}{r^3}-(1+\cos^2\theta-\lambda)\,r+1/r\\ \dot\theta&=\frac{p_\theta}{r^2},\\ \dot p_\theta&=r^2\cos\theta\,\sin\theta.\end{aligned}$$

2. I punti di equilibrio sono $p_r=p_\theta=0$ e
   (a) $r=1/\sqrt{2-\lambda}$, $\theta=0,\pi$, esistono solo se $\lambda<2$. Sempre instabile.
   (b) $r=1/\sqrt{1-\lambda}$, $\theta=\pm\pi/2$, esistono solo se $\lambda<1$. Sempre stabile.

3. Il sistema possiede punti di equilibrio stabili solo se $\lambda<1$, punti (b). La frequenza delle piccole oscillazioni intorno a questi punti sono: $\omega_r^2=2\frac{(1-\lambda)^2}{1-\lambda+\lambda^2}$, $\omega_\theta^2=1$.

Esercizio 3.

1. $$\{Q,P\} = p^{a+2} \;, \qquad \text{dunque} \qquad a=-2$$

   e la trasformazione è

   $$\begin{cases} P = p^3 \;, \\ Q = \frac{1}{3}\frac{q}{p^2} \;. \end{cases} \qquad \begin{cases} p = P^{1/3} \;, \\ q = 3QP^{2/3} \;. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial q} = p = P^{1/3} & \Rightarrow G(q,P) = qP^{1/3} + h(P) \\ \frac{\partial G}{\partial P} = Q = \frac{1}{3}qP^{-2/3} & \Rightarrow \frac{1}{3}qP^{-2/3} = \frac{1}{3}qP^{-2/3} + h'(P) \Rightarrow h(P) = \text{const.} \end{cases}$$

   e la costante si può scegliere uguale a zero senza perdere generalità.

3. Sostituendo $(p,q) \to (P,Q)$ nell'Hamiltoniana si ottiene

   $$K(Q,P) = P - \frac{1}{3}Q^3 \;.$$

   Dunque

   $$\begin{cases} \dot{Q}(t) = \frac{\partial K}{\partial P} = 1 & \Rightarrow \quad Q = Q_0 + t \;, \\ \dot{P}(t) = -\frac{\partial K}{\partial Q} = Q^2 & \Rightarrow \quad P = P_0 + \frac{(Q_0+t)^3 - Q_0^3}{3} \end{cases}$$

   Usando la trasformazione canonica per i valori $p(0) = 1$ e $q(0) = 0$, si ha

   $$Q_0 = 0 \;, \qquad P_0 = 1 \;,$$

   per cui

   $$\begin{cases} Q(t) = t \\ P(t) = 1 + \frac{t^3}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} q(t) = 3t\left(1 + \frac{t^3}{3}\right)^{2/3} \\ p(t) = \left(1 + \frac{t^3}{3}\right)^{1/3} \end{cases}$$

4. Le equazioni di Hamilton sono

   $$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{q^2}{27p^6} \;, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 3p^2 + \frac{2q^3}{27p^7}$$

   Dalla soluzione trovata abbiamo

   $$\dot{p} = \frac{t^2}{3}\left(1 + \frac{t^3}{3}\right)^{-2/3} \qquad = \qquad \frac{q^2}{27p^6} = \frac{1}{27}9t^2\left(1 + \frac{t^3}{3}\right)^{-2/3}$$

   La seconda equazione si verifica analogamente.

Esercizio 4.

1. $v_{\min} = \frac{c}{5}$;
2. $\beta'_A = 0 \qquad \beta'_B = \frac{2\beta_A}{1-3\beta_A^2}$;
3. $(0,0,0,0)$, $\tau = t'$;
4. $(\beta_A\gamma_A L,\ -\gamma_A L,\ 0,0)$ con $\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_A^2}}$;
5. $V_{\min} = \frac{c}{5}$.

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 11 settembre 2024
Proff A. Crisanti, M. Papinutto, F. Zamponi

Discussione dettagliata degli errori più comuni

Esercizio 1.

2. Il passaggio dalla Lagrangiana alla Hamiltoniana nel caso di un sistema con più di una coordinata richiede l'inversione di un sistema lineare che lega i momenti alle velocità. Abbiamo visto in generale (mie note, capitolo 5) che

$$p_a = \sum_b g_{ab}(q)\dot{q}_b \qquad \text{ovvero} \qquad p = \hat{g}(q)\dot{q}$$

Nel caso di questo esercizio, abbiamo

$$\begin{aligned} p_\theta &= a^2(m_1+m_2+M)\,\dot\theta + ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi)\,\dot\varphi \\ p_\varphi &= b^2(m_1+m_2) \qquad\quad \dot\varphi + ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi)\,\dot\theta \end{aligned}$$

Bisogna pensare a questo come a un sistema di due equazioni lineari che legano (p_θ, p_φ) a $(\dot\theta,\dot\varphi)$, gli altri termini vanno pensati come dei coefficienti. In particolare, per ottenere la Hamiltoniana dobbiamo ricavare $(\dot\theta,\dot\varphi)$ in funzione di (p_θ, p_φ) e dunque dobbiamo risolvere il sistema lineare di due equazioni in due incognite.

Nella notazione matriciale precedente, questo corrisponde a un indice $a \in \{\theta,\varphi\}$ e

$$\begin{cases} g_{\theta\theta} = a^2(m_1+m_2+M) \\ g_{\varphi\varphi} = b^2(m_1+m_2) \\ g_{\theta\varphi} = ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi) \\ g_{\varphi\theta} = ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi) \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \hat g = \begin{pmatrix} a^2(m_1+m_2+M) & ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi) \\ ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi) & b^2(m_1+m_2)\end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \hat g \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{dunque} \qquad \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot\varphi \end{pmatrix} = \hat g^{-1} \begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix}$$

Bisogna dunque invertire una matrice due per due. Definiamo

$$\det \hat g = D(\theta,\varphi) = a^2b^2\Big[(m_1+m_2)(m_1+m_2+M) - (m_1-m_2)^2\sin^2(\theta-\varphi)\Big]$$

e abbiamo (ricordiamo che la matrice $\hat g$ è simmetrica)

$$\hat g^{-1} = \frac{1}{D(\theta,\varphi)}\begin{pmatrix} g_{\varphi\varphi} & -g_{\theta\varphi} \\ -g_{\theta\varphi} & g_{\theta\theta}\end{pmatrix}$$

Questo permette di ricavare $(\dot\theta,\dot\varphi)$ e sostituirli poi nella Lagrangiana per avere la Hamiltoniana.

Una maniera semplice è ricordare che l'energia cinetica è quadratica e la matrice $\hat g$ è simmetrica, dunque

$$T = \frac12(\dot\theta,\dot\varphi)\hat g\begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot\varphi \end{pmatrix} = \frac12(p_\theta,p_\varphi)\hat g^{-1}\hat g\hat g^{-1}\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \frac12(p_\theta,p_\varphi)\hat g^{-1}\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2D(\theta,\varphi)}\left[g_{\varphi\varphi}p_\theta^2 - 2g_{\theta\varphi}p_\theta p_\varphi + g_{\theta\theta}p_\varphi^2\right]$$

e infine

$$\begin{aligned} H(\theta,\varphi,p_\theta,p_\varphi) = T + U = \frac{1}{2D(\theta,\varphi)}&\left[b^2(m_1+m_2)\,p_\theta^2 + a^2(m_1+m_2+M)\,p_\varphi^2 - 2ab(m_1-m_2)\,p_\theta p_\varphi\sin(\theta-\phi)\right] \\ &+ ag(m_1+m_2-M)\sin\theta + bg(m_1-m_2)\cos\varphi, \end{aligned}$$

Esercizio 2.

2. Chiamiamo $\hat{k}$ la matrice Hessiana, ovvero la matrice delle derivate seconde del potenziale (una matrice due per due nel caso di questo esercizio), calcolata nel punto di equiibrio.

   Vi ricordo che la condizione $\det \hat{k}$ è una condizione necessaria ma non sufficiente perché il punto di equilibrio sia stabile. La condizione sufficiente è che la matrice (simmetrica) $\hat{k}$ sia definita positiva. Questo si può verificare in vari modi alternativi ed equivalenti

   - Tutti gli autovalori sono positivi;
   - Usando il criterio di Sylvester, tutte le sottomatrici ottenute dalle prime n righe e colonne della matrice per $n = 1, 2, 3, \cdots$ inclusa la matrice stessa, hanno determinante positivo;
   - Solamente per una matrice 2×2, la traccia e il determinante sono entrambi positivi.

   Nel caso specifico dell'esercizio dato, le matrici $\hat{k}$ venivano diagonali, e dunque è sufficiente verificare che i due elementi diagonali (i loro autovalori) siano entrambi positivi.

Esercizio 3.

3. Sostituendo $(p, q) \to (P, Q)$ nell'Hamiltoniana si ottiene

$$K(Q, P) = P - \frac{1}{3} Q^3 \ .$$

   Dunque

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = \frac{\partial K}{\partial P} = 1 & \Rightarrow \quad Q = Q_0 + t \ , \\ \dot{P}(t) = -\frac{\partial K}{\partial Q} = Q^2 & \Rightarrow \quad P = P_0 + \frac{(Q_0+t)^3 - Q_0^3}{3} \end{cases}$$

   Attenzione all'integrazione delle equazioni differenziali. Le funzioni Q e P sono funzioni del tempo e le equazioni fanno intese come

$$\begin{cases} \frac{dQ(t)}{dt} = 1 \\ \frac{dP(t)}{dt} = -Q(t)^2 \ . \end{cases}$$

   La prima equazione si integra da sola perché $P(t)$ non appare, e fornisce la soluzione $Q(t) = Q_0 + t$. La seconda equazione va integrata considerando $Q(t)$ come una funzione del tempo, dunque

$$\frac{dP(t)}{dt} = -(Q_0 + t)^2 \quad \Rightarrow \quad P(t) - P_0 = \int_0^t dt' (Q_0 + t')^2$$

   E' assolutamente sbagliato integrare la seconda equazione come se Q fosse una costante e dunque scrivere

$$P(t) = P_0 + Q^2 t \qquad \text{sbagliato!}$$

Esercizio 4.

5. Si ragiona così. Ricordiamo per prima cosa che $\beta_A = v_A/c$ dove v_A è la velocità di A nel riferimento R).

   Nei punti precedenti abbiamo visto che

   - Il riferimento R' è solidale con l'astronave A che si trova dunque ferma nell'origine e il tempo in R' coincide col tempo proprio di A. L'ordigno dunque scoppierà al tempo $t'_1 = \tau_1 = \sqrt{6}L/c$ quando l'astronave A si trova sempre immobile in $x' = 0$. (punti 2 e 3)
   - L'evento di partenza dell'astronave B, ovvero $\ll$ astronave B situata in $t = 0$ nel punto $(-L, 0, 0) \gg$ in R, corrisponde all'evento $(\beta_A \gamma_A L,\ -\gamma_A L,\ 0, 0)$ con $\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_A^2}}$ (punto 4)
   - La velocità di B in R' è $v'_B = c\beta'_B$ con $\beta'_B = \frac{2\beta_A}{1-3\beta_A^2}$ (punto 2)

   L'astronave B segue dunque la linea

   $$x'_B = -\gamma_A L + c\beta'_B(t' - \frac{\beta_A\gamma_A L}{c}) = -\gamma_A L + \beta'_B(ct' - \beta_A\gamma_A L) \ .$$

   e incontra l'astronave A, ferma in $x' = 0$, al tempo

   $$x'_B = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{ct'}{L} = \beta_A\gamma_A + \frac{\gamma_A}{\beta'_B} = \beta_A\gamma_A + \frac{\gamma_A(1-3\beta_A^2)}{2\beta_A} = \gamma_A \frac{1-\beta_A^2}{2\beta_A}$$

   e dunque abbiamo la condizione

   $$\frac{ct'}{L} \leq \frac{c\tau_1}{L} = \sqrt{6} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1-\beta_A^2}{2\beta_A} \leq \frac{\sqrt{6}}{\gamma_A} = \sqrt{6}\sqrt{1-\beta_A^2}$$

   Questa condizione diventa $\beta_A \geq 1/5$ che fornisce dunque lo stesso risultato del ragionamento fatto in R.