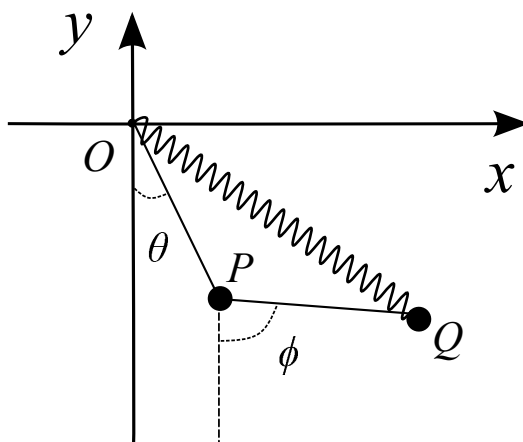


Compito di Meccanica Analitica e Relativistica dell'11 Novembre 2024
Proff A. Crisanti, M. Papinutto, F. Zamponi

Esercizio 1 [6 punti].



In un piano verticale due aste OP e PQ di lunghezza l e massa trascurabile hanno un estremo P in comune. La prima asta è vincolata a ruotare senza attrito attorno all'origine degli assi O . In corrispondenza di P e di Q si trovano due punti materiali di massa m . Il sistema è soggetto alla forza di gravità e, inoltre, il punto Q è collegato al punto O tramite una molla ideale (di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla). Si chiede:

1. la Lagrangiana del sistema;
2. le equazioni di Eulero-Lagrange;
3. gli integrali primi del moto rispettivamente in presenza ed in assenza della forza di gravità.

Esercizio 2 [8 punti]. Un punto materiale P di massa m si muove in \mathbb{R}^3 vincolato alla superficie

$$z = \frac{r^4}{4R^3}, \quad \text{dove} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

L'asse z è orientato verso l'alto, e sul punto agiscono la forza di gravità g e una forza di energia potenziale $-ax$. Si scelga un sistema di unità di misura in cui $m = 1$, $R = 1$ e $g = 1$. Usando le coordinate polari, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,

1. Si scriva la Hamiltoniana del sistema.
2. Al variare di $a \neq 0$ si trovino le posizioni di equilibrio del sistema (non si consideri il caso $r = 0$).
3. Si discuta la stabilità delle posizioni di equilibrio trovate al punto precedente.
4. Per $a = 1$ si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni intorno a una posizione di equilibrio stabile.

Esercizio 3 [8 punti]. Si consideri la Hamiltoniana

$$H(p, q) = \frac{1}{3} \left[\log \left(\frac{p}{2q} \right) \right]^3,$$

e la funzione generatrice del primo tipo

$$G_1(q, Q) = q^a e^Q.$$

1. Si scriva la trasformazione canonica generata da $G_1(q, Q)$, ovvero $P(p, q)$ e $Q(p, q)$.
2. Si scriva la Hamiltoniana $K(P, Q)$.
3. Scelto un valore opportuno di a , si risolvano le equazioni del moto per (P, Q) .
4. Si usi la soluzione per (P, Q) e la trasformazione canonica per risolvere il moto con dato iniziale $p_0 = 1$ e $q_0 = 1$.

Esercizio 4 [8 punti]. Un treno di lunghezza a riposo $L_T = L$ viaggia a velocità relativistica $v_T = \frac{4}{5}c$ ed entra in una galleria il cui ingresso è situato ad $x = 0$ e la cui uscita a $x = L_G = L$. Consideriamo gli eventi: E_1 ingresso della testa del treno nella galleria, E_2 uscita della testa del treno dalla galleria, E_3 ingresso della coda del treno nella galleria. Si chiede:

1. Scegliendo come origine dei tempi nel sistema di riferimento S solidale con la terra (e quindi con la galleria) l'istante nel quale la coda del treno entra nella galleria ($t_3 = 0$), quali sono i tempi t_1 e t_2 corrispondenti agli eventi E_1 ed E_2 ?
2. Di che tipologia sono gli intervalli spatio-temporali E_2-E_1 ed E_3-E_2 ?
3. Esiste un sistema di riferimento S' che si muova lungo l'asse x nel quale l'evento E_2 e l'evento E_3 sono simultanei? In caso di risposta affermativa qual è la velocità di S' in modulo ed il suo verso?
4. Quali sono le velocità v'_T e v'_G del treno e della galleria in S' ?
5. Quali sono le lunghezze L'_T e L'_G di treno e galleria in S' ?
6. Esiste un sistema di riferimento S'' nel quale gli eventi E_2 ed E_1 avvengono in uno stesso punto dello spazio? In caso affermativo qual è la velocità di S'' in modulo ed il suo verso?

Soluzioni

Esercizio 1.

1.

$$L = ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) + mgl(2\cos\theta + \cos\phi) - kl^2(1 + \cos(\theta - \phi))$$

2.

$$2ml^2\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\phi}\cos(\theta - \phi) + ml^2\dot{\phi}^2\sin(\theta - \phi) = -2mgl\sin\theta + kl^2\sin(\theta - \phi)$$

$$ml^2\ddot{\phi} + ml^2\ddot{\theta}\cos(\theta - \phi) - ml^2\dot{\theta}^2\sin(\theta - \phi) = -mgl\sin\phi - kl^2\sin(\theta - \phi)$$

3.

$$\mathcal{H} = ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) - mgl(2\cos\theta + \cos\phi) + kl^2(1 + \cos(\theta - \phi))$$

In assenza di forza di gravità, la Lagrangiana è simmetrica sotto la trasformazione $(\theta, \phi) \rightarrow (\theta + s, \phi + s)$, che corrisponde a una rotazione globale del sistema, dunque si conserva anche il momento angolare:

$$\mathcal{I} = ml^2\dot{\theta}(2 + \cos(\theta - \phi)) + ml^2\dot{\phi}(1 + \cos(\theta - \phi))$$

Esercizio 2.

1.

$$H(p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2(1+r^6)} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + \frac{r^4}{4} - ar\cos\theta.$$

2. Per $a > 0$, $\theta = 0$ e $r = \sqrt[3]{a}$. Per $a < 0$, $\theta = \pi$ e $r = \sqrt[3]{|a|}$.

3. La matrice delle derivate seconde del potenziale è

$$K = \begin{pmatrix} 3r^2 & a\sin\theta \\ a\sin\theta & ar\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt[3]{a^2} & 0 \\ 0 & |a|\sqrt[3]{|a|} \end{pmatrix}$$

La matrice è diagonale ed entrambi gli elementi sulla diagonale sono positivi, dunque gli equilibri trovati al punto precedente sono stabili.

4. Per $a = 1$ abbiamo $k_r = 3$ e $k_\theta = 1$. Le masse sono $m_r = 2$ e $m_\theta = 1$. Dunque le frequenze sono $\omega_r = \sqrt{k_r/m_r} = \sqrt{3/2}$ e $\omega_\theta = \sqrt{k_\theta/m_\theta} = 1$.

Esercizio 3.

1.

$$\begin{cases} P = -\frac{pq}{a} \\ Q = \log\left[\frac{p}{aq^a-1}\right] \end{cases} \quad \begin{cases} p = a(-P)^{\frac{a-1}{a}}e^{Q/a} \\ q = (-P)^{1/a}e^{-Q/a} \end{cases}$$

2.

$$K(P, Q) = \frac{1}{3} \left[\frac{2Q}{a} + \frac{a-2}{a} \log(-P) + \log \frac{a}{2} \right]^3$$

3. Conviene scegliere $a = 2$ nel qual caso $K = Q^3/3$ e dunque $\dot{P} = -Q^2$, $\dot{Q} = 0$. Si ottiene $Q = Q_0$ e $P = P_0 - Q_0^2 t$.

4. Usando la trasformazione canonica con $a = 2$ si ha $P_0 = -p_0q_0/2 = -1/2$ e $Q_0 = \log[p_0/(2q_0)] = -\log 2$. Dunque $P(t) = -1/2 - (\log 2)^2 t$ e $Q(t) = -\log 2$, e

$$\begin{cases} p = 2\sqrt{-P}e^{Q/2} = \sqrt{1 + 2(\log 2)^2 t} \\ q = \sqrt{-P}e^{-Q/2} = \sqrt{1 + 2(\log 2)^2 t} \end{cases}$$

Esercizio 4.

1. $ct_1 = -\frac{3L}{4}$, $ct_2 = \frac{L}{2}$

2. $E_2 - E_1$ di tipo tempo, $E_3 - E_2$ di tipo spazio.

3. $V_{S'} = \frac{c}{2}$

4. $v'_G = -\frac{c}{2}$, $v'_T = \frac{c}{2}$

5. $L'_G = L'_T = \frac{\sqrt{3}}{2}L$

6. $V_{S''} = \frac{4}{5}c$