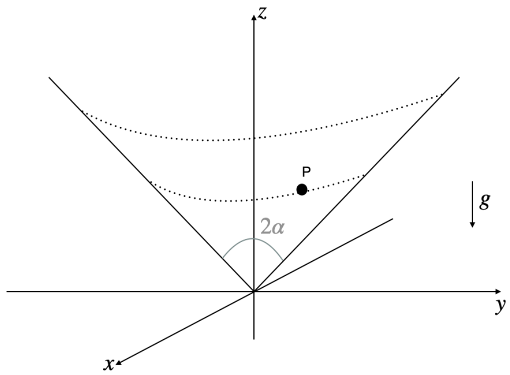
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 28 gennaio 2025
Proff V. Mastropietro, M. Papinutto, F. Zamponi

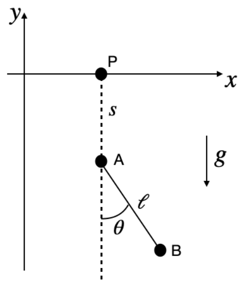
Esercizio 1 [10 punti]. Un punto materiale di massa m è vincolato con un vincolo ideale (olonomo perfetto) alla superficie di un cono. Il cono ha il vertice orientato verso il basso, ha angolo al vertice 2α, e altezza infinita. Il punto è sottoposto alla forza di gravità.



Scegliendo come coordinate lagrangiane $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\theta = \arctan(y/x)$, calcolare:

1. La lagrangiana del sistema.
2. Le equazioni di Eulero-Lagrange e gli integrali primi.
3. Dire se vi sono dati iniziali per cui il moto è circolare uniforme.
4. Considerando in generale i moti con momento angolare non nullo, discutere in generale i moti, scrivere l'espressione integrale del periodo per i moti periodici nella variabile radiale e la condizione affinché la traiettoria si chiuda (ovvero il moto globale sia periodico).

Esercizio 2 [10 punti]. Si consideri un'asta AB omogenea di massa m e di lunghezza ℓ, vincolata a muoversi in un piano verticale. All'estremo A è connessa una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica κ, fissata al punto P e vincolata ad essere verticale.



Usando come coordinate lagrangiane $s = |AP|$ e l'angolo θ tra l'asta e la verticale, si calcolino

1. La lagrangiana del sistema.
2. La hamiltoniana del sistema.
3. Le posizioni di equilibrio e la loro stabilità.
4. In corrispondenza dei punti stabili si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni e i modi normali.

Esercizio 3 [10 punti]. Si consideri la trasformazione

$$p = \beta P^\alpha \cos Q\ , \qquad q = \beta P^\alpha \sin Q$$

1. Si trovino α, β per cui la trasformazioni è canonica.
2. Con quei valori, si scriva nelle coordinate Q, P la Hamiltoniana $H = (p^2+q^2) + (p^2+q^2)^2$.
3. Si integrino le equazioni del moto con tale trasformazione.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Il vincolo può essere scritto come

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = \rho\mu \qquad \mu = \cos\alpha/\sin\alpha$$

e quindi la lagrangiana è data da

$$L = \frac{m}{2}[(1+\mu^2)\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2] - mg\rho\mu$$

2. Poiché $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ si conserva l'energia

$$E = \frac{m}{2}[(1+\mu^2)\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2] + mg\rho\mu$$

Inoltre θ è una variabile ciclica quindi si conserva

$$p_\theta = m\rho^2\dot\theta$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$m(1+\mu^2)\ddot\rho = -mg\mu + m\rho\dot\theta^2\ , \qquad 2\rho\dot\rho\dot\theta + \rho^2\ddot\theta = 0\ .$$

3. Il moto circolare corrisponce a $\dot\rho = 0, \dot\theta = \omega$ per cui $-mg\mu + m\rho_0\omega^2 = 0$ e dunque $\rho_0 = g\mu/\omega^2$. Il valore di θ_0 è arbitrario.

4. Il sistema è integrabile quindi

$$E = \frac{m}{2}(1+\mu^2)\dot\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{2m\rho^2} + mg\rho\mu$$

Il moto coincide con quello di una particella unidimensionale con potenziale $V_{\text{eff}} = \frac{p_\theta^2}{2m\rho^2} + mg\rho\mu$. Per $p_\theta \neq 0$ ha un minimo in $-\frac{p_\theta^2}{m\rho^3} + mg\mu = 0$; per il teorema di Dirichelet il punto di equilibrio è stabile. Poiché il potenziale V_{eff} tende a $+\infty$ per $\rho \to 0$ e per $\rho \to \infty$, tutti gli altri moti sono periodici in ρ con periodo

$$T_\rho = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho \frac{1}{\sqrt{E - \frac{p_\theta^2}{2m\rho^2} - mg\rho\mu}}\sqrt{\frac{m}{2}(1+\mu^2)}$$

con $V_e(\rho_\pm) = E$.
Il moto totale è la composizione del moto in ρ ed il moto in θ. Per $\rho = \rho_0$ il moto totale è periodico; per gli altri valori il moto è periodico solo se

$$\int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho \frac{1}{\sqrt{E - \frac{p_\theta^2}{2m\rho^2} - mg\rho\mu}}\sqrt{\frac{m}{2}(1+\mu^2)}\frac{2p_\theta}{m\rho^2} = 2\pi\frac{P}{Q}$$

con P, Q interi (altrimenti è quasi periodico).

Esercizio 2.

1. Le coordinate del baricentro dell'asta sono date da

$$x = \frac{\ell}{2}\sin\theta \qquad y = -s - \frac{\ell}{2}\cos\theta$$

e quindi

$$\dot x = \frac{\ell}{2}\cos\theta\dot\theta \qquad \dot y = -\dot s + \frac{\ell}{2}\sin\theta\dot\theta$$

Si ha che $T = T_G + T_R$ dove T_G è il contributo baricentrale e $T_R = \frac{m\ell^2}{24}\dot\theta^2$ il contributo di rotazione. Dunque

$$L = \frac{m}{2}(\dot s^2 + \frac{\ell^2}{3}\dot\theta^2 - \ell\sin\theta\dot\theta\dot s) - \frac{k}{2}s^2 + mg(s + \frac{\ell}{2}\cos\theta)$$

2. La matrice associata alla forma quadratica dell'energia cinetica (matrice delle masse) è

$$g(s,\theta) = m \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\ell}{2}\sin\theta \\ -\frac{\ell}{2}\sin\theta & \ell^2/3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Dunque

$$H = \frac{1}{2}(p_s, p_\theta) g^{-1} \begin{pmatrix} p_s \\ p_\theta \end{pmatrix} + \frac{k}{2}s^2 - mg(s + \frac{\ell}{2}\cos\theta)$$

o, in forma più esplicita

$$H = \frac{(\ell^2/3)p_s^2 + p_\theta^2 + \ell\sin\theta\, p_s p_\theta}{2m\ell^2[1/3 - (1/4)\sin^2\theta]} + \frac{k}{2}s^2 - mg(s + \frac{\ell}{2}\cos\theta)$$

3. $V(s,\theta) = \frac{k}{2}s^2 - mg(s + \frac{\ell}{2}\cos\theta)$ quindi $\partial_s V = ks - mg$ e $\partial_\theta V = mg(\ell/2)\sin\theta$ quindi i punti di equilibrio (s,θ) sono $(mg/k, 0)$ ed $(mg/k, \pi)$. La matrice delle derivate seconde è diagonale

$$K(s,\theta) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mg(\ell/2)\cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

Dunque $(mg/k, 0)$ è stabile mentre $(mg/k, \pi)$ è instabile.

4. Nel punto di equilibrio stabile $(mg/k, 0)$ le matrici di massa e Hessiana sono entrambe diagonali,

$$g(mg/k, 0) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m\ell^2/3 \end{pmatrix} \qquad K(mg/k, 0) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mg(\ell/2) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Le frequenze proprie sono dunque $\omega_1^2 = k/m$ ed $\omega_2^2 = 3g/(2\ell)$; i modi normali sono $(1,0)$ e $(0,1)$.

Esercizio 3.

1. Usando $p = \beta P^\alpha \cos Q$, $q = \beta P^\alpha \sin Q$ la parentesi di Poisson è

$$\{q,p\} = \alpha\beta^2 P^{2\alpha-1}\cos^2 Q + \alpha\beta^2 P^{2\alpha-1}\sin^2 Q = \alpha\beta^2 P^{2\alpha-1}$$

Se $2\alpha = 1$ e $\beta^2 = 1/\alpha = 2$ abbiamo $\{p,q\} = 1$ e la trasformazione è canonica.

2. Abbiamo quindi $p = \sqrt{2P}\cos Q$, $q = \sqrt{2P}\sin Q$. In queste variabili la nuova Hamiltoniana è

$$K = 2P + 4P^2$$

3. Le equazioni di Hamilton sono $\dot{P} = 0$ e $\dot{Q} = 2 + 8P$; il moto e'

$$P(t) = P_0 \qquad Q(t) = Q_0 + (2 + 8P_0)t$$

Di conseguenza

$$p(t) = \sqrt{2P_0}\cos[Q_0 + (2+8P_0)t] \qquad q(t) = \sqrt{2P_0}\sin[Q_0 + (2+8P_0)t]$$

I dati iniziali P_0, Q_0 si ottengono dalla trasformazione inversa,

$$P_0 = (p_0^2 + q_0^2)/2 \qquad Q_0 = \arctan(q_0/p_0)$$

E' facile verificare che le espressioni ottenute sono soluzioni delle equazioni di Hamilton per p, q.

Un commento su un errore comune

Un errore molto comune è mescolare due diversi metodi di soluzione del secondo esercizio. Il problema è scrivere l'energia cinetica dell'asta e poi imporre i vincoli. Si può procedere in due modi.

1. Usando il centro di massa G dell'asta che si trova a metà. In questo caso, l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2$$

Il momento di inerzia è $I_G = m\ell^2/12$.

Imponendo i vincoli, le coordinate del baricentro dell'asta sono date da

$$x_G = \frac{\ell}{2}\sin\theta \qquad y_G = -s - \frac{\ell}{2}\cos\theta$$

e quindi

$$\dot{x}_G = \frac{\ell}{2}\cos\theta\dot{\theta} \qquad \dot{y}_G = -\dot{s} + \frac{\ell}{2}\sin\theta\dot{\theta}$$

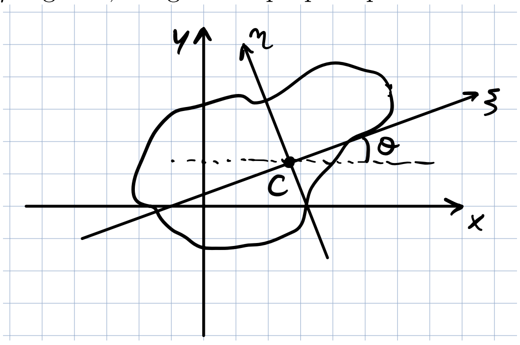
Si ottiene dunque

$$T = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \frac{\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - \ell\sin\theta\dot{\theta}\dot{s})$$

2. Usando il perno A dell'asta. In questo caso, poiché il punto di riferimento non è il centro di massa, è necessario usare la formula completa per l'energia cinetica del corpo rigido bidimensionale, ovvero

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}^2 + m\xi_G[-\dot{x}_A\sin\theta + \dot{y}_A\cos\theta]\dot{\theta} + m\eta_G[-\dot{x}_A\cos\theta - \dot{y}_A\sin\theta]\dot{\theta}$$

dove ξ_G e η_G sono le coordinate del centro di massa in un riferimento centrato nel punto A e solidale con il corpo. L'angolo θ è tra l'asse ξ e l'asse x. Scegliendo l'asse η parallelo all'asta, con il punto A nell'origine e il punto B dal lato degli η negativi, l'angolo θ è proprio quello indicato nella figura del problema.



Abbiamo dunque $\xi_G = 0$ e $\eta_G = -\ell/2$, dunque

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}^2 + m\frac{\ell}{2}[\dot{x}_A\cos\theta + \dot{y}_A\sin\theta]\dot{\theta}$$

Usando il teorema di Huygens-Steiner, il momento di inerzia è

$$I_A = I_G + m(\xi_G^2 + \eta_G^2) = m\ell^2/12 + m\ell^2/4 = m\ell^2/3$$

Imponendo i vincoli, le coordinate del punto A sono $x_A = x_P = \textit{costante}$ e $y_A = -s$ dunque $\dot{x}_A = 0$ e $\dot{y}_A = -\dot{s}$. Sostituendo, otteniamo

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - m\frac{\ell}{2}\dot{s}\dot{\theta}\sin\theta$$

Si ottiene dunque lo stesso risultato.