Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 13 febbraio 2025

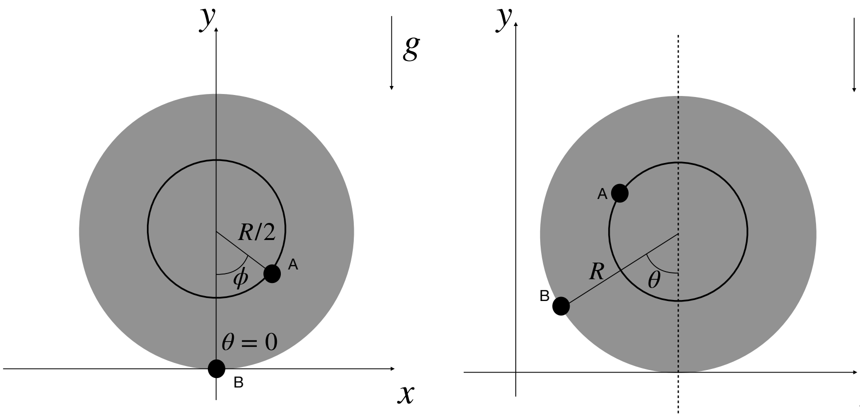
Proff V. Mastropietro, M. Papinutto, F. Zamponi

Esercizio 1 [10 punti]. Consideriamo il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ in una dimensione, la cui coordinata è $x \in \mathbf{R}$, sottoposto a una forza

$$F(x) = -x^3 + x^5$$

1. Si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
2. Si trovi la condizione che devono soddisfare i dati iniziali (posizione e velocità) affinché si abbiano moti periodici.
3. Si dica se vi sono moti che arrivano all'infinito e si dica se il tempo per raggiungerlo è finito o infinito.
4. Si discutano qualitativamente i moti disegnando le corrispondenti traiettorie nello spazio delle fasi.

Esercizio 2 [10 punti]. Si consideri un disco omogeneo di raggio R e massa M vincolato a muoversi in un piano verticale, che rotola senza strisciare su una retta orizzontale. Sul disco vi è una guida circolare di massa nulla e di raggio $R/2$ su cui può muoversi liberamente un punto materiale A di massa m. Sul bordo del disco di raggio R è fissato un punto materiale B di massa m. Sul sistema agisce la forza di gravità.



Si consideri il sistema di coordinate lagrangiane seguente. Quando il punto B si trova sull'asse verticale in basso, fissiamo $\theta = 0$ (figura di sinistra). Quando il disco rotola senza strisciare verso destra, e il punto B si sposta a sinistra, l'angolo θ aumenta. Indichiamo poi con ϕ l'angolo formato dalla retta passante per il punto A e il centro del disco e dall'asse verticale. Usando queste coordinate, e ricordando il momento di inerzia di un disco omogeneo rispetto al suo centro di massa $I_G = MR^2/2$, si calcolino

1. La Lagrangiana del sistema.
2. L'Hamiltoniana del sistema.
3. Le posizioni di equilibrio e la loro stabilità.
4. In corrispondenza dei punti stabili, scegliendo un sistema di unità di misura in cui $m = R = g = 1$, si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni al variare di M.

Esercizio 3 [10 punti]. Data la trasformazione

$$Q = \log(1 + q^\alpha \cos p) \qquad P = 2(1 + q^\alpha \cos p)q^\alpha \sin p$$

1. Si dica per quale valore di α la trasformazione è canonica.
2. Trovare la trasformazione canonica inversa.
3. Si trovi la funzione generatrice $F(Q, p)$, ricordando che $\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$

Soluzioni

Esercizio 1.

1. L'energia si conserva. Il potenziale è $V(x) = x^4/4 - x^6/6$. Si ha un minimo in $x = 0$ con $V = 0$ (punto di equilibrio stabile) e due massimi in $x = \pm 1$ (punti di equilibrio instabile); nei punti di massimo $V = 1/12$.

2. La dipendenza dell'energia dalle condizioni iniziali è: $E = v_0^2/2 - x_0^4/4 + x_0^6/6$. I moti periodici si hanno nella regione $0 < E < 1/12$, $-1 > x_0 > 1$.

3. Si hanno moti che arrivano all'infinito per

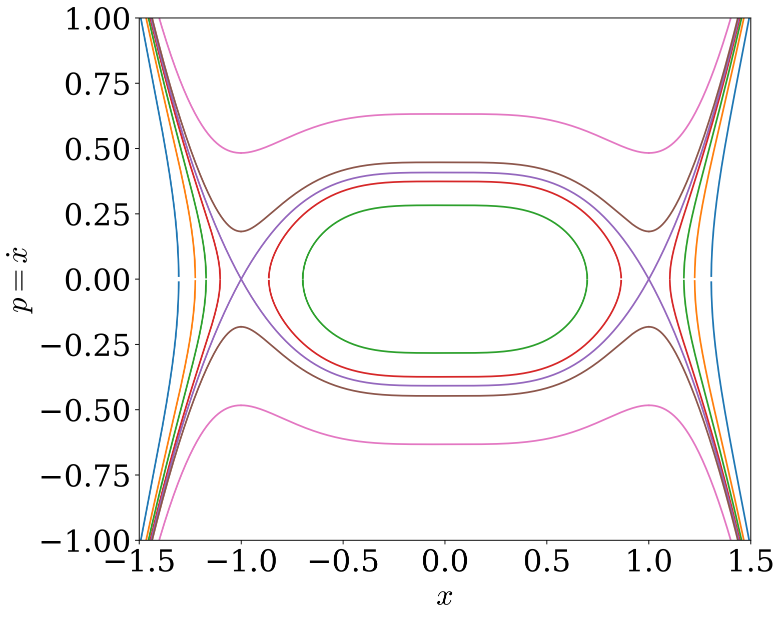
   - $E > 1/12$;
   - $E = 1/12$ e dati iniziali $v_0 > 0, x_0 \in]1, \infty[$ oppure $v_0 < 0, x_0 \in] - \infty, -1[$;
   - $E < 1/12$ e dati iniziali $x_0 \notin [-1, 1]$;

   L'integrale

   $$t = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2(E - x^4/4 + x^6/6)}}$$

   è convergente e quindi il tempo per raggiungere l'infinito è finito.

4. La rappresentazione dei moti nello spazio delle fasi è quella data in figura Per $E > 1/12$, i moti sono aperti (ad esempio curva rosa superiore e inferiore). La separatrice corrisponde a $E = 1/12$ (curva viola). Per $0 < E < 1/12$ esiste un modo periodico e due moti che arrivano all'infinito (ad esempio curva verde). Per $E < 0$ esistono solo questi ultimi (ad esempio curva blu).



Esercizio 2.

1. Il disco rotola senza strisciare, quindi il centro di massa del disco ha coordinate $(x_G, y_G) = (R\theta, R)$. Di conseguenza l'energia cinetica del disco e'

$$T_D = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

Le coordinate del punto A sono $(x_A, y_A) = (R\theta + \frac{R}{2}\sin\phi, R - \frac{R}{2}\cos\phi)$ per cui l'energia cinetica di A è

$$T_A = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2/4 + \cos\phi\dot{\theta}\dot{\phi})$$

Le coordinate del punto B sono $(R\theta - R\sin\theta, R - R\cos\theta)$ per cui

$$T_B = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2(2 - 2\cos\theta)$$

L'energia potenziale è $V = Mgy_G + mgy_A + mgy_B = -mgR\cos\phi/2 - mgR\cos\theta$ a meno di una costante che può essere trascurata. Dunque la lagrangiana è

$$L = (R\dot{\theta})^2/2(\frac{3M}{2} + 3m - 2m\cos\theta) + \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}^2/4 + \frac{m}{2}R^2\cos\phi\dot{\theta}\dot{\phi} + mgR/2\cos\phi + mgR\cos\theta$$

2. La matrice Hessiana dell'energia cinetica (rispetto alle velocità lagrangiane) è:

$$\mathbf{H}_K = \begin{pmatrix} R^2(\frac{3M}{2} + 3m - 2m\cos\theta) & mR^2\cos\phi/2 \\ mR^2\cos\phi/2 & mR^2/4 \end{pmatrix}$$

La sua inversa:

$$\mathbf{H}_K^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} mR^2/4 & -mR^2\cos\phi/2 \\ -mR^2\cos\phi/2 & R^2(\frac{3M}{2} + 3m - 2m\cos\theta) \end{pmatrix}$$

dove $D = \frac{m^2R^4}{4}(\frac{3M}{2m} + 3 - 2\cos\theta - \cos^2\phi)$. L'Hamiltoniana è quindi:

$$H = \frac{1}{2}(p_\theta\ p_\phi)\ \mathbf{H}_K^{-1}\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\phi \end{pmatrix} + V = \frac{p_\theta^2 + 4p_\phi^2(\frac{3M}{2m} + 3 - 2\cos\theta) - 4p_\theta p_\phi\cos\phi}{2mR^2(\frac{3M}{2m} + 3 - 2\cos\theta - \cos^2\phi)} + V$$

3. Il solo punto di equilibrio stabile è $\theta = 0, \phi = 0$.

4. Le matrici Hessiane dell'energia potenziale e dell'energia cinetica valutate in $\theta = 0, \phi = 0$ sono, rispettivamente,

$$\overline{\mathbf{H}}_V = \begin{pmatrix} mgR & 0 \\ 0 & mgR/2 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{H}}_K = \begin{pmatrix} R^2(\frac{3M}{2} + m) & mR^2/2 \\ mR^2/2 & mR^2/4 \end{pmatrix}$$

Scegliendo $m = g = R = 1$, e chiamando $a = 1 + 3M/2$, le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni di

$$\det\begin{pmatrix} 1 - \omega^2 a & -\omega^2/2 \\ -\omega^2/2 & 1/2 - \omega^2/4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (a-1)\omega^4 - \omega^2(2a+1) + 2 = 0$$

dunque

$$\omega^2 = \frac{1}{a-1}\left[a + \frac{1}{2} \pm \sqrt{a^2 - a + \frac{9}{4}}\right]$$

Si noti che entrambi i valori di ω^2 sono strettamente positivi dato che $a > 1$.

Esercizio 3.

1. Calcolando $\{Q,P\}_{q,p}$ troviamo

$$
\begin{aligned}
\{Q,P\} &= \left[\frac{\alpha q^{\alpha-1}\cos p}{(1+q^\alpha\cos p)}\right] 2(1+q^\alpha\cos p)q^\alpha\cos p - \left[\frac{\alpha q^{\alpha-1}\cos p}{(1+q^\alpha\cos p)}\right] 2q^\alpha\sin^2 p \\
&+ \left[\frac{q^\alpha\sin p}{(1+q^\alpha\cos p)}\right] 2(1+q^\alpha\cos p)\alpha q^{\alpha-1}\sin p + \left[\frac{q^\alpha\sin p}{(1+q^\alpha\cos p)}\right] 2\alpha q^{\alpha-1}\cos p q^\alpha \sin p \\
&= 2\alpha q^{2\alpha-1}(\cos p)^2 - \frac{2\alpha q^{2\alpha-1}(\cos p)(\sin p)^2}{(1+q^\alpha\cos p)} \\
&+ 2\alpha q^{2\alpha-1}(\sin p)^2 + \frac{2\alpha q^{2\alpha-1}(\cos p)(\sin p)^2}{(1+q^\alpha\cos p)} \\
&= 2\alpha q^{2\alpha-1}
\end{aligned}
$$

e dunque $\{Q,P\}=1$ per $\alpha=1/2$.

2.

$$
q = (e^Q-1)^2 + \frac{P^2}{4e^{2Q}} \qquad\qquad p = \operatorname{arccot}\frac{2e^Q(e^Q-1)}{P}
$$

3. Poiché $\frac{\partial F(Q,p)}{\partial p} = -q$ e $\frac{\partial F(Q,p)}{\partial Q} = -P$ si ha $q = [(e^Q-1)/\cos p]^2 = -\frac{\partial F(Q,p)}{\partial p}$ da cui $F = -(e^Q-1)^2\tan p + c(Q)$; inoltre $P = 2e^Q[e^Q-1]\tan p$ quindi $c(Q)=0$. Otteniamo

$$
F(Q,p) = -(e^Q-1)^2\tan p
$$