Compito simulato di Meccanica Analitica - a.a. 2024/25
Proff V. Mastropietro, M. Papinutto, F. Zamponi

Questa simulazione di compito di esame è basata sul compito del 11/09/2024, nel quale l'esercizio di meccanica relativistica è stato sostituito dall'esercizio 0 adattato dalla raccolta del prof.Caglioti (corso SMIA).

ATTENZIONE: questo compito viene fornito a titolo indicativo per esercitarvi, gli esami dell'a.a. 2024/25 potrebbero avere un formato un po' diverso.

Esercizio 0. Un punto materiale P di massa 1 si muove in $\mathbb{R}^3$ vincolato alla superficie

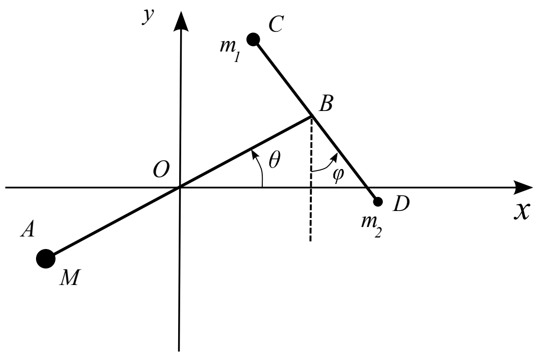
$$S = \{(x, y, z) : z = \frac{\rho^4}{4}\}$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sul punto agisce la forza di gravità $g = 1$, diretta lungo l'asse z (orientato verso l'alto).

Usando come coordinate lagrangiane le coordinate polari, $x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta$:

1. Si scriva la lagrangiana del sistema.
2. Si trovino due integrali primi indipendenti.
3. Si trovi l'insieme dei dati iniziali che danno luogo ad un moto circolare uniforme.
4. Si dica se i moti trovati al punto precedente sono stabili.
5. Si scriva l'espressione integrale delle frequenze associate a un moto generico del sistema.

Esercizio 1.



Una sbarretta di massa trascurabile e lunghezza $\overline{AB} = 2a$ può ruotare liberamente in un piano verticale intorno al suo centro O coincidente con l'origine del sistema di riferimento Oxy, con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale ed orientato verso l'alto. All'estremità A della sbarretta è fissata una massa puntiforme M. All'altro estremo, estremo B, è fissato il centro di una seconda sbarretta di massa trascurabile e lunghezza $\overline{CD} = 2b$. La sbarretta CD può ruotare liberamente nel piano verticale intorno al suo centro. All'estremo C della seconda sbarretta è fissata una massa puntiforme di massa m_1, mentre all'estremo opposto D è fissata una terza massa puntiforme di massa m_2.

Sul sistema agisce la forza peso.

Utilizzando come coordinate generalizzate l'angolo θ che la sbarretta AB forma con l'asse x e l'angolo φ che la sbarretta CD forma con la verticale, ed orientati come in Figura, si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema.
2. La Hamiltoniana del sistema.
3. Indicare le quantità conservate nel caso $m_1 \neq m_2$ e nel caso particolare $m_1 = m_2$

Esercizio 2. Si consideri il sistema descritto dalla Hamiltoniana

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2}\left[\frac{p_r^2}{1+(r-1/r)^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right] + \frac{1}{2}\big(1+\cos^2\theta - \lambda\big)\, r^2 - \ln r, \qquad r > 0,$$

dove λ è un parametro reale.
Si chiede:

1. Le equazioni di Hamilton.
2. I punti di equilibrio del sistema e la relativa stabilità al variare del parametro reale λ.
3. La frequenza delle piccole oscillazioni intorno ai punti di equilibrio stabile del sistema.

Esercizio 3. Sia data la seguente Hamiltoniana

$$H(q,p) = p^3 - \frac{q^3}{81p^6}\ ,$$

e la trasformazione

$$\begin{cases} Q &= \frac{1}{3}\, q\, p^a\ , \\ P &= p^3\ , \end{cases}$$

con a parametro reale.
Si chiede:

1. Determinare i valori del parametro a affinchè la trasformazione sia canonica.
2. Determinare la funzione generatrice $G(q, P)$ della trasformazione.
3. Utilizzare la trasformazione canonica per risolvere le equazioni del moto per (q, p) ottenute a partire dalla Hamiltoniana data con le condizioni iniziali $p(t = 0) = 1$ e $q(t = 0) = 0$.
4. Verificare esplicitamente che le soluzioni ottenute verificano le equazioni di Hamilton per (p, q).

Soluzioni

Esercizio 0.

1.
$$\mathcal{L}(\rho,\theta,\dot\rho,\dot\theta)=\frac{1}{2}[(1+\rho^6)\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2]-\frac{\rho^4}{4}\ .$$

2. Ci sono due integrali primi: l'energia generalizzata
$$H(\rho,\theta,\dot\rho,\dot\theta)=\frac{1}{2}(1+\rho^6)\dot\rho^2+\frac{1}{2}\rho^2\dot\theta^2+\frac{\rho^4}{4}\ ,$$
e il momento angolare
$$p_\theta=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}=\rho^2\dot\theta=L\ .$$

3. L'equazione del moto per ρ, sapendo che $p_\theta=L$ è costante, è data da
$$\ddot\rho(1+\rho^6)+3\rho^5\dot\rho^2=\frac{L^2}{\rho^3}-\rho^3\ .$$
Un moto circolare uniforme ha $\dot\rho=\ddot\rho=0$ e dunque deve soddisfare una condizione iniziale tale che il membro di destra dell'equazione precedente si annulli, ovvero $\frac{L^2}{\rho_0^3}-\rho_0^3=0$. Ricordando che $L=\rho_0^2\dot\theta_0$, otteniamo
$$\rho_0^6=L^2=\rho_0^4\dot\theta_0^2\qquad\Leftrightarrow\qquad\rho_0=|\dot\theta_0|\ .$$
Inoltre, $\dot\rho_0=0$ altrimenti ρ si discosta dal valore che annulla le forze, e θ_0 è arbitrario. Qualunque dato iniziale che soddisfi queste condizioni dà luogo a un moto circolare uniforme, dunque
$$(\rho_0,\dot\rho_0=0,\theta_0,\dot\theta_0=\pm\rho_0)\ ,$$
per qualunque $\rho_0>0$ e $\theta_0\in[0,2\pi)$.

4. Dall'energia generalizzata otteniamo, sostituendo $L=\rho^2\dot\theta$,
$$E=\frac{1}{2}(1+\rho^6)\dot\rho^2+\frac{1}{2}\frac{L^2}{\rho^2}-\frac{\rho^4}{4}$$
Il potenziale efficace è dunque
$$V_{\text{eff}}(\rho)=\frac{1}{2}\frac{L^2}{\rho^2}+\frac{\rho^4}{4}$$
La sua derivata seconda nel punto di equilibrio, ricordando che $\rho_0=L^{1/3}$, è
$$V''_{\text{eff}}(\rho)=3\frac{L^2}{\rho^4}+3\rho^2\qquad\Rightarrow\qquad V''_{\text{eff}}(\rho_0)=3\frac{L^2}{L^{4/3}}+3L^{2/3}=6L^{2/3}>0\ ,$$
dunque ρ_0 corrisponde a un minimo del potenziale e il moto è stabile.

5. Il periodo del moto radiale si ottiene ricavando $\dot\rho$ dall'energia,
$$\dot\rho=\pm\sqrt{\frac{2[E-V_{\text{eff}}(\rho)]}{1+\rho^6}}\qquad\Rightarrow\qquad T_\rho(E,L)=2\int_{\rho_-(E,L)}^{\rho_+(E,L)}\frac{d\rho}{\dot\rho}=2\int_{\rho_-(E,L)}^{\rho_+(E,L)}d\rho\sqrt{\frac{1+\rho^6}{2[E-V_{\text{eff}}(\rho)]}}$$
La frequenza corrispondente è $\omega_\rho(E,L)=2\pi/T_\rho(E,L)$.

La frequenza associata a θ è data dal valore medio di $\dot\theta$, dunque
$$\omega_\theta(E,L)=\frac{1}{T_\rho}\int_0^{T_\rho}dt\,\dot\theta=\frac{1}{T_\rho}\int_0^{T_\rho}dt\,\frac{L}{\rho^2}=\frac{2}{T_\rho}\int_{\rho_-(E,L)}^{\rho_+(E,L)}d\rho\,\frac{L}{\rho^2}\sqrt{\frac{1+\rho^6}{2[E-V_{\text{eff}}(\rho)]}}$$

Esercizio 1.

1.

$$\mathcal{L}(\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi) = \frac{a^2}{2}(m_1+m_2+M)\,\dot\theta^2 + \frac{b^2}{2}(m_1+m_2)\,\dot\varphi^2 + ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi)\,\dot\theta\dot\varphi$$
$$- ag(m_1+m_2-M)\sin\theta - bg(m_1-m_2)\cos\varphi.$$

2.

$$H(\theta,\varphi,p_\theta,p_\varphi) = \frac{1}{2D(\theta,\varphi)}\left[b^2(m_1+m_2)\,p_\theta^2 + a^2(m_1+m_2+M)\,p_\varphi^2 - 2ab(m_1-m_2)\,p_\theta p_\varphi \sin(\theta-\phi)\right]$$
$$+ ag(m_1+m_2-M)\sin\theta + bg(m_1-m_2)\cos\varphi,$$

con

$$D(\theta,\varphi) = a^2b^2\Big[(m_1+m_2)(m_1+m_2+M) - (m_1-m_2)^2\sin^2(\theta-\varphi)\Big].$$

3. Formulazione Lagrangiana:
La Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo di conseguenza l'energia generalizzata

$$\mathcal{E}(\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi) = \frac{a^2}{2}(m_1+m_2+M)\,\dot\theta^2 + \frac{b^2}{2}(m_1+m_2)\,\dot\varphi^2 + ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi)\,\dot\theta\dot\varphi$$
$$+ ag(m_1+m_2-M)\sin\theta + bg(m_1-m_2)\cos\varphi,$$

è una costante del moto.

Se $m_1 = m_2$ la Lagrangiana non dipende dalla variabile φ di conseguenza

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot\varphi}\mathcal{L} = 2b^2 m_1\,\frac{d}{dt}\dot\varphi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot\varphi = costante.$$

Formulazione Hamiltoniana:
La Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo di conseguenza la Hamiltoniana è una costante del moto.

Se $m_1 = m_2$ la Hamiltoniana non dipende dalla variabile φ di conseguenza

$$\dot p_\varphi = -\frac{\partial}{\partial\varphi}H = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_\varphi = costante.$$

Esercizio 2.

1.

$$\begin{aligned}
\dot r &= \frac{p_r}{1+(r-1/r)^2},\\
\dot p_r &= \frac{p_r^2}{[1+(r-1/r)^2]^2}\,(r-1/r^3) + \frac{p_\theta^2}{r^3} - (1+\cos^2\theta-\lambda)\,r + 1/r\\
\dot\theta &= \frac{p_\theta}{r^2},\\
\dot p_\theta &= r^2\cos\theta\,\sin\theta.
\end{aligned}$$

2. I punti di equilibrio sono $p_r = p_\theta = 0$ e
   (a) $r = 1/\sqrt{2-\lambda}$, $\theta = 0,\pi$, esistono solo se $\lambda < 2$. Sempre instabile.
   (b) $r = 1/\sqrt{1-\lambda}$, $\theta = \pm\pi/2$, esistono solo se $\lambda < 1$. Sempre stabile.

3. Il sistema possiede punti di equilibrio stabili solo se $\lambda < 1$, punti (b). La frequenza delle piccole oscillazioni intorno a questi punti sono: $\omega_r^2 = 2\frac{(1-\lambda)^2}{1-\lambda+\lambda^2}$, $\omega_\theta^2 = 1$.

Esercizio 3.

1. $$\{Q,P\} = p^{a+2}\ , \qquad \text{dunque} \qquad a=-2$$

   e la trasformazione è

   $$\begin{cases} P = p^3\ , \\ Q = \frac{1}{3}\frac{q}{p^2}\ . \end{cases} \qquad \begin{cases} p = P^{1/3}\ , \\ q = 3QP^{2/3}\ . \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial q} = p = P^{1/3} & \Rightarrow G(q,P) = qP^{1/3} + h(P) \\ \frac{\partial G}{\partial P} = Q = \frac{1}{3}qP^{-2/3} & \Rightarrow \frac{1}{3}qP^{-2/3} = \frac{1}{3}qP^{-2/3} + h'(P) \Rightarrow h(P) = \text{const.} \end{cases}$$

   e la costante si può scegliere uguale a zero senza perdere generalità.

3. Sostituendo $(p,q) \to (P,Q)$ nell'Hamiltoniana si ottiene

   $$K(Q,P) = P - \frac{1}{3}Q^3\ .$$

   Dunque

   $$\begin{cases} \dot{Q}(t) = \frac{\partial K}{\partial P} = 1 & \Rightarrow \quad Q = Q_0 + t\ , \\ \dot{P}(t) = -\frac{\partial K}{\partial Q} = Q^2 & \Rightarrow \quad P = P_0 + \frac{(Q_0+t)^3 - Q_0^3}{3} \end{cases}$$

   Usando la trasformazione canonica per i valori $p(0) = 1$ e $q(0) = 0$, si ha

   $$Q_0 = 0\ , \qquad P_0 = 1\ ,$$

   per cui

   $$\begin{cases} Q(t) = t \\ P(t) = 1 + \frac{t^3}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} q(t) = 3t\left(1+\frac{t^3}{3}\right)^{2/3} \\ p(t) = \left(1+\frac{t^3}{3}\right)^{1/3} \end{cases}$$

4. Le equazioni di Hamilton sono

   $$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{q^2}{27p^6}\ , \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 3p^2 + \frac{2q^3}{27p^7}$$

   Dalla soluzione trovata abbiamo

   $$\dot{p} = \frac{t^2}{3}\left(1+\frac{t^3}{3}\right)^{-2/3} \qquad = \qquad \frac{q^2}{27p^6} = \frac{1}{27}9t^2\left(1+\frac{t^3}{3}\right)^{-2/3}$$

   La seconda equazione si verifica analogamente.

Discussione dettagliata degli errori più comuni

Esercizio 1.

2. Il passaggio dalla Lagrangiana alla Hamiltoniana nel caso di un sistema con più di una coordinata richiede l'inversione di un sistema lineare che lega i momenti alle velocità. Abbiamo visto in generale (mie note, capitolo 5) che

$$p_a = \sum_b g_{ab}(q)\dot{q}_b \qquad \text{ovvero} \qquad p = \hat{g}(q)\dot{q}$$

Nel caso di questo esercizio, abbiamo

$$\begin{aligned} p_\theta &= a^2(m_1+m_2+M)\,\dot{\theta} + ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi)\,\dot{\varphi} \\ p_\varphi &= b^2(m_1+m_2)\qquad \dot{\varphi} + ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi)\,\dot{\theta} \end{aligned}$$

Bisogna pensare a questo come a un sistema di due equazioni lineari che legano (p_θ, p_φ) a $(\dot{\theta}, \dot{\varphi})$, gli altri termini vanno pensati come dei coefficienti. In particolare, per ottenere la Hamiltoniana dobbiamo ricavare $(\dot{\theta}, \dot{\varphi})$ in funzione di (p_θ, p_φ) e dunque dobbiamo risolvere il sistema lineare di due equazioni in due incognite.

Nella notazione matriciale precedente, questo corrisponde a un indice $a \in \{\theta, \varphi\}$ e

$$\begin{cases} g_{\theta\theta} = a^2(m_1+m_2+M) \\ g_{\varphi\varphi} = b^2(m_1+m_2) \\ g_{\theta\varphi} = ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi) \\ g_{\varphi\theta} = ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi) \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \hat{g} = \begin{pmatrix} a^2(m_1+m_2+M) & ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi) \\ ab(m_1-m_2)\sin(\theta-\varphi) & b^2(m_1+m_2) \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \hat{g}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \qquad \text{dunque} \qquad \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \hat{g}^{-1}\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix}$$

Bisogna dunque invertire una matrice due per due. Definiamo

$$\det \hat{g} = D(\theta,\varphi) = a^2b^2\Big[(m_1+m_2)(m_1+m_2+M) - (m_1-m_2)^2\sin^2(\theta-\varphi)\Big]$$

e abbiamo (ricordiamo che la matrice $\hat{g}$ è simmetrica)

$$\hat{g}^{-1} = \frac{1}{D(\theta,\varphi)}\begin{pmatrix} g_{\varphi\varphi} & -g_{\theta\varphi} \\ -g_{\theta\varphi} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

Questo permette di ricavare $(\dot{\theta}, \dot{\varphi})$ e sostituirli poi nella Lagrangiana per avere la Hamiltoniana.

Una maniera semplice è ricordare che l'energia cinetica è quadratica e la matrice $\hat{g}$ è simmetrica, dunque

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\theta},\dot{\varphi})\hat{g}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(p_\theta,p_\varphi)\hat{g}^{-1}\hat{g}\hat{g}^{-1}\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(p_\theta,p_\varphi)\hat{g}^{-1}\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2D(\theta,\varphi)}\left[g_{\varphi\varphi}p_\theta^2 - 2g_{\theta\varphi}p_\theta p_\varphi + g_{\theta\theta}p_\varphi^2\right]$$

e infine

$$\begin{aligned} H(\theta,\varphi,p_\theta,p_\varphi) = T + U = \frac{1}{2D(\theta,\varphi)}&\left[b^2(m_1+m_2)\,p_\theta^2 + a^2(m_1+m_2+M)\,p_\varphi^2 - 2ab(m_1-m_2)\,p_\theta p_\varphi\sin(\theta-\phi)\right] \\ &+ ag(m_1+m_2-M)\sin\theta + bg(m_1-m_2)\cos\varphi, \end{aligned}$$

Esercizio 2.

2. Chiamiamo $\hat{k}$ la matrice Hessiana, ovvero la matrice delle derivate seconde del potenziale (una matrice due per due nel caso di questo esercizio), calcolata nel punto di equiibrio.

   Vi ricordo che la condizione $\det \hat{k}$ è una condizione necessaria ma non sufficiente perché il punto di equilibrio sia stabile. La condizione sufficiente è che la matrice (simmetrica) $\hat{k}$ sia definita positiva. Questo si può verificare in vari modi alternativi ed equivalenti

   - Tutti gli autovalori sono positivi;
   - Usando il criterio di Sylvester, tutte le sottomatrici ottenute dalle prime n righe e colonne della matrice per $n = 1, 2, 3, \cdots$ inclusa la matrice stessa, hanno determinante positivo;
   - Solamente per una matrice 2×2, la traccia e il determinante sono entrambi positivi.

   Nel caso specifico dell'esercizio dato, le matrici $\hat{k}$ venivano diagonali, e dunque è sufficiente verificare che i due elementi diagonali (i loro autovalori) siano entrambi positivi.

Esercizio 3.

3. Sostituendo $(p, q) \to (P, Q)$ nell'Hamiltoniana si ottiene

$$K(Q, P) = P - \frac{1}{3}Q^3 \ .$$

   Dunque

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = \frac{\partial K}{\partial P} = 1 & \Rightarrow \quad Q = Q_0 + t \ , \\ \dot{P}(t) = -\frac{\partial K}{\partial Q} = Q^2 & \Rightarrow \quad P = P_0 + \frac{(Q_0+t)^3 - Q_0^3}{3} \end{cases}$$

   Attenzione all'integrazione delle equazioni differenziali. Le funzioni Q e P sono funzioni del tempo e le equazioni fanno intese come

$$\begin{cases} \frac{dQ(t)}{dt} = 1 \\ \frac{dP(t)}{dt} = -Q(t)^2 \ . \end{cases}$$

   La prima equazione si integra da sola perché $P(t)$ non appare, e fornisce la soluzione $Q(t) = Q_0 + t$.

   La seconda equazione va integrata considerando $Q(t)$ come una funzione del tempo, dunque

$$\frac{dP(t)}{dt} = -(Q_0 + t)^2 \quad \Rightarrow \quad P(t) - P_0 = \int_0^t dt' (Q_0 + t')^2$$

   E' assolutamente sbagliato integrare la seconda equazione come se Q fosse una costante e dunque scrivere

$$P(t) = P_0 + Q^2 t \qquad \text{sbagliato!}$$