ESAME DI MECCANICA RAZIONALE DEL 26/2/1998 (MATEMATICI)(PROF.C.MARCHIORO)

Si risolvano i due seguenti problemi.

I

Sia data la trasformazione dalle (q, p) alle (Q, P):

$$Q = \frac{1}{5} p\, q^{\alpha} \quad , \quad P = -q^5 p^{\beta}$$

Trovare i valori di α e β per i quali la trasformazione sia canonica e per tali valori trovare la funzione generatrice.

II

In un piano orizzontale un'asta omogenea di massa M, lunghezza L, di estremi O ed A, è libera di ruotare senza attrito attorno al suo estremo fisso O. Una guida rettilinea di massa trascurabile appartenente al piano orizzontale è solidale ed ortoganale alla sbarra e passa per l'estremo A. Lungo la guida scorre senza attrito un punto materiale P di massa m soggetto alla forza attiva $\underline{F} = -k\ AP$, $k > 0$.

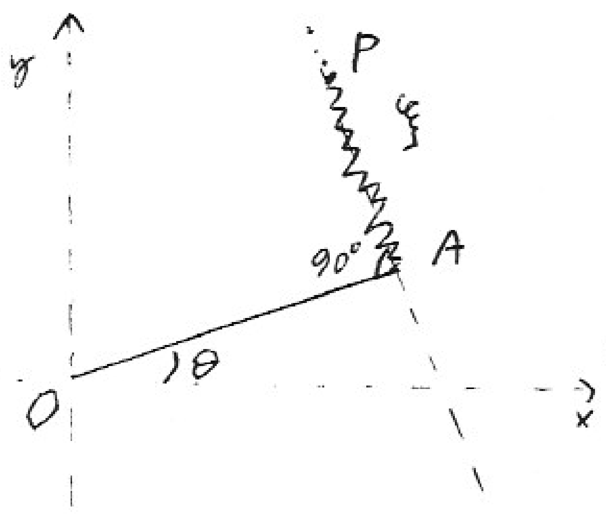
Si assumano come variabili lagrangiane l'angolo θ che l'asta OA forma con un asse fisso e l'ascissa $\xi = \overline{AP}$.

1) Si scrivano le equazioni del moto.

2) Si trovino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

3) Dalla forma della Lagrangiana si deducano due integrali primo del moto e se ne dia il significato fisico.

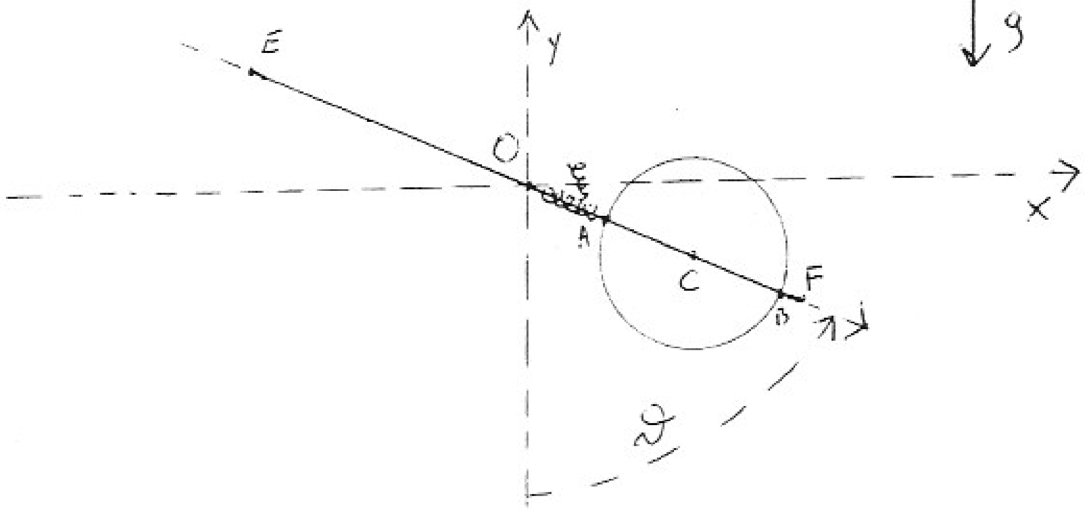
4) Usando questi integrali primi, date le condizioni iniziali $\theta(0) = 0$, $\dot\theta(0) = 0$, $\xi(0) = 0$, $\dot\xi(0) = \dot\xi_o$, trovare il massimo valore nel tempo di $|\xi|$.



Compito di Meccanica Razionale, 7/10/'97, corso Marchioro

Esercizio 1.

Un'asta omogenea di lunghezza L e massa m é vincolata a muoversi su di un piano verticale (O, x, y), con il suo punto medio fissato nell'origine O. Un disco omogeneo di raggio R e massa M, si muove nel piano con un suo diametro AB vincolato a scorrere su di una guida, di massa trascurabile, solidale con l'asta. Sul punto A del disco é applicata una forza elastica di costante k, di richiamo verso l'origine. Sia ξ l'ascissa sulla guida del punto A, rispetto ad O, e sia θ l'angolo che la guida forma con la verticale discendente.



a) Ricordando che il momento di inerzia baricentrico del disco ripetto all'asse ortogonale al disco é $\frac{MR^2}{2}$, scrivere le equazioni del moto.

b) Determinare le posizioni di equilibrio al variare del parametro adimensionale $\lambda = \frac{Rk}{Mg}$ (g é l'accelerazione di gravitá).

c) Discutere la stabilitá delle posizioni di equilibrio al variare di λ.

d) Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile.

Esercizio 2.

Determinare i valori di α per i quali la trasformazione:

$$\begin{cases} Q = -q^{\alpha} + \log p \\ P = -p \end{cases}$$

é canonica, e quindi trovare la funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$.

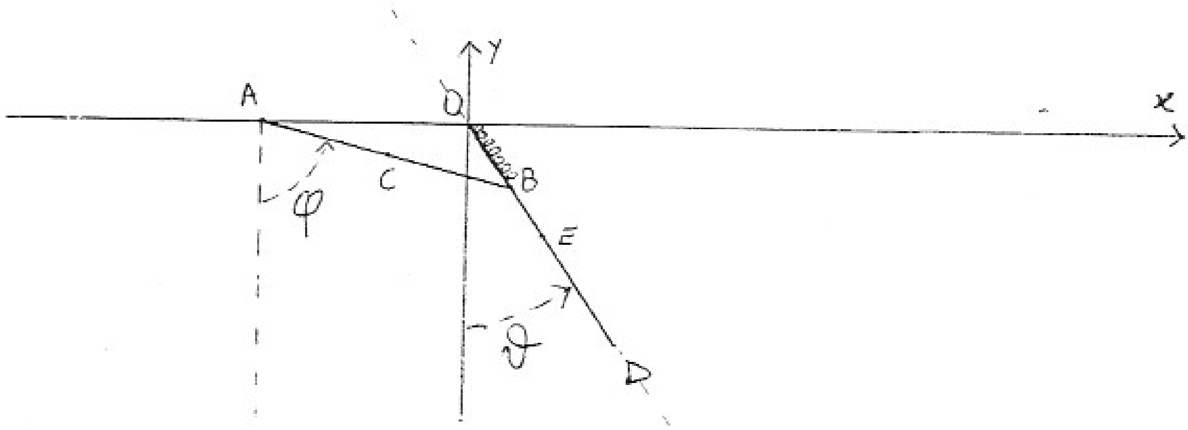
Compito di Meccanica Razionale, 23/7/'97, corso Marchioro

Due aste pesanti omogenee, di lunghezza L e massa M, sono vincolate a muoversi su di un piano verticale. Siano O, D gli estremi della prima asta e A, B gli estremi della seconda.

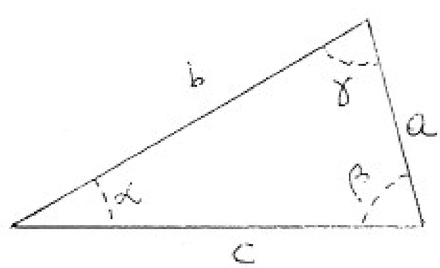
L'estremo O della prima asta è fissato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano inerziale $(O\,x\,y)$, con x asse orizzontale e y asse verticale ascendente.

L'estremo A della seconda asta è vincolato a muoversi sull'asse delle x; l'estremo B scorre su una guida rettilinea, di massa trascurabile, solidale con l'asta OD; inoltre è richiamato dal punto O mediante una molla di costante elastica k.

Siano θ e φ, coordinate lagrangiane, gli angoli che l' asta OD e l'asta AB formano rispettivamente con la direzione verticale discendente.



1) Scrivere la Lagrangiana. Si consiglia, per determinare la configurazione in termini delle coordinate lagrangiane, l'uso del teorema dei seni:



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Inoltre si ricorda che il momento di inerzia *baricentrico* di un'asta omogenea di massa M e lunghezza L è dato da $I = \frac{ML^2}{12}$.

2) Determinare le posizioni di equilibrio al variare del parametro adimensionale $\lambda = \frac{Mg}{2kL}$ (g è l'accelerazione di gravità).

3) Discutere la stabilità della posizione di equilibrio $(\theta, \varphi) = (0, 0)$: per i valori di λ per i quali essa è stabile, determinare le frequenze delle piccole oscillazioni.

Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito Esame 9/7/97

Nel piano verticale π è posto un anello circolare omogeneo pesante di centro C, massa M e raggio R. Tale anello può muoversi passando senza attrito per un punto fisso O. Un punto materiale pesante di massa m è fissato all'anello ed è soggetto alla forza
$F = - k\, OP$ ($k > 0$). (Vedi figura).

Scegliamo come variabili Lagrangiane l'angolo θ che 0C forma con la verticale discendente e l'angolo ϕ che CP forma con la verticale discendente.

1) Scrivere le equazioni del moto.

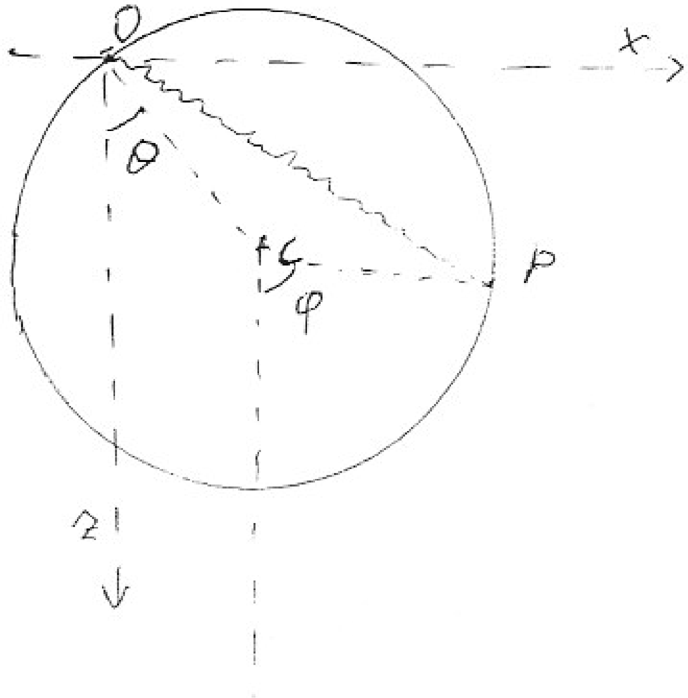
2) Supponendo ora m=0 ,trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilità.

3) Sempre supponendo m=0 trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Supponiamo ora oltre m=0 anche il peso trascurabile cioè g = accellerazione di gravità = 0. Scrivere due integrali primi del moto e tramite questi, date le condizioni iniziali $\theta(0) = 0$, $\dot\theta(0) = 0$, $\phi(0) = \pi/2$, $\dot\phi(0) = \dot\phi_0$, trovare i valori di $\dot\phi_0$ per in quali $\overset{\theta - \phi}{\phi}$ fa un giro completo. (Si consiglia di operare la trasformazione $\xi = \theta - \phi$, $\eta = (\theta + \phi) /2$).

5) Nelle ipotesi del punto 4) scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi.

6)Nelle ipotesi m=M e g≠0, trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero in funzione del parametro $\lambda = \dfrac{kR}{Mg}$.



I COMPITO SESSIONE ESTIVA, 9/6/97

(CORSO MARCHIORO)

Una guida rettilinea r é fissata su di un piano verticale: in un sistema di riferimento (O, x, y) sul piano, con y asse verticale ascendente, essa coincide con la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Una lastra omogenea piana, quadrata, di lato L e massa M, é vincolata a muoversi sul semipiano superiore individuato dalla guida r, in modo che un suo lato scorra su r.

Sia A il vertice di ordinata massima della lastra, e sia B il vertice di ascissa minima.

In A é vincolato un estremo di un'asta omogenea di lunghezza L e massa m.

Una molla di costante elastica k congiunge il vertice B all'origine O.

Si usino come coordinate lagrangiane ξ e θ, dove ξ é la distanza con segno di B da O, orientata nel verso delle x positive, e θ l'angolo che l'asta forma con la direzione verticale discendente.

a) Si scriva la Lagrangiana e le equazioni del moto.

b) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilitá.

c) Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni nelle posizioni di equilibrio stabile, assumendo, per semplicitá, $L = 1$, $M = \frac{1}{2}$, $m = 1$, $k = 1$, $g = 1$ (g é l'accelerazione di gravitá).

d) Si scriva l'Hamiltoniana e l'equazione di Hamilton-Jacobi.

e) Si considerino ora tascurabili gli effetti della gravitá, si assuma $k = 0$ e si consideri il dato iniziale $\xi(0) = 0$, $\dot{\xi}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$. Per quali valori di $\dot{\theta}_0$ l'asta compie un giro completo intorno ad A? (Si consiglia di utilizzare i due integrali primi del moto).

Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito Esonero 6/5/97 **compito A**

Nel piano verticale π è posto un sistema cartesiano di assi Oxz con z verticale discendente. Disegnamo una retta passante per O e che forma con la verticale discendente z un angolo di $\pi/6$ e consideriamo una guida rettilinea parallela a tale retta posta più in basso a distanza R. Su tale guida rotola senza strisciare un disco omogeneo pesante di centro C,massa M e raggio R. Sul bordo del disco è posta una guida in cui scorre senza attrito un punto materiale pesante P di massa m, soggetto alla forza $F = - k\, HP$ ($k > 0$) ove H è la proiezione di P sull'asse x . (Vedi figura).

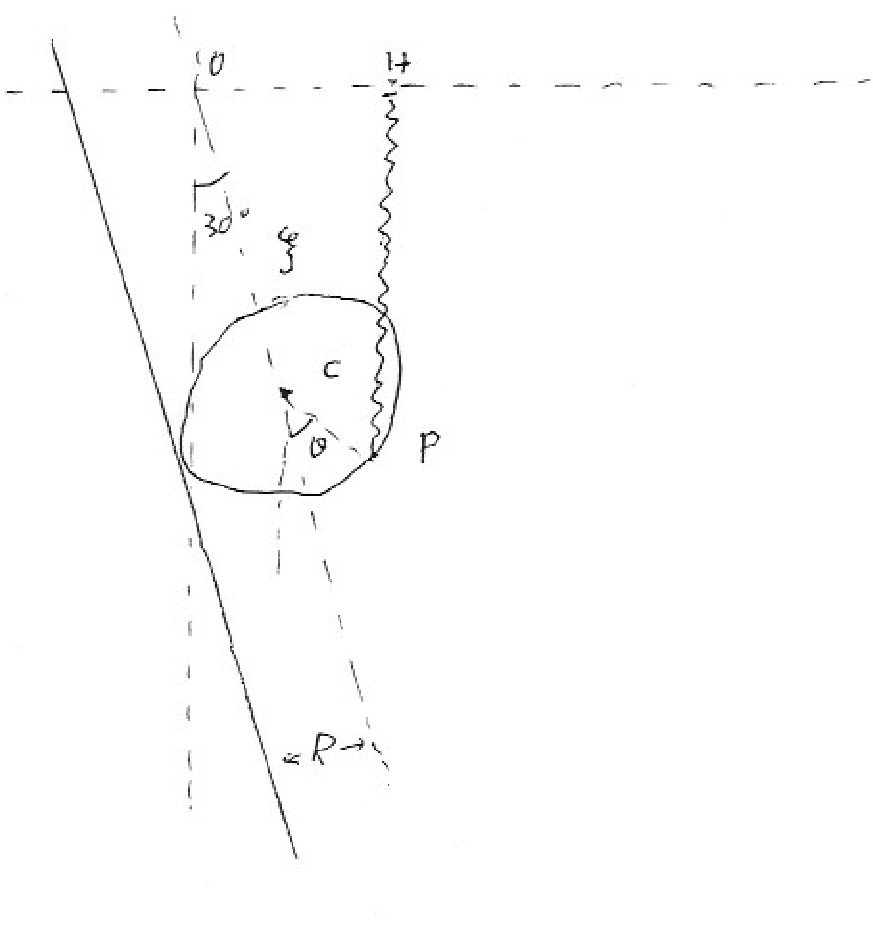
Scegliamo come variabili Lagrangiane la distanza ξ di C da O e l'angolo θ che CP forma con la verticale discendente.

1) Scrivere le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilità.

3) Trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile. Per semplicità di conto si supponga in questo caso le grandezze M,m,R,g,k uguali ad 1.

4) Supponiamo ora $M = 0$. Discutere il numero e la stabilità delle posizioni di equilibrio.



Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito Esame 26/2/97

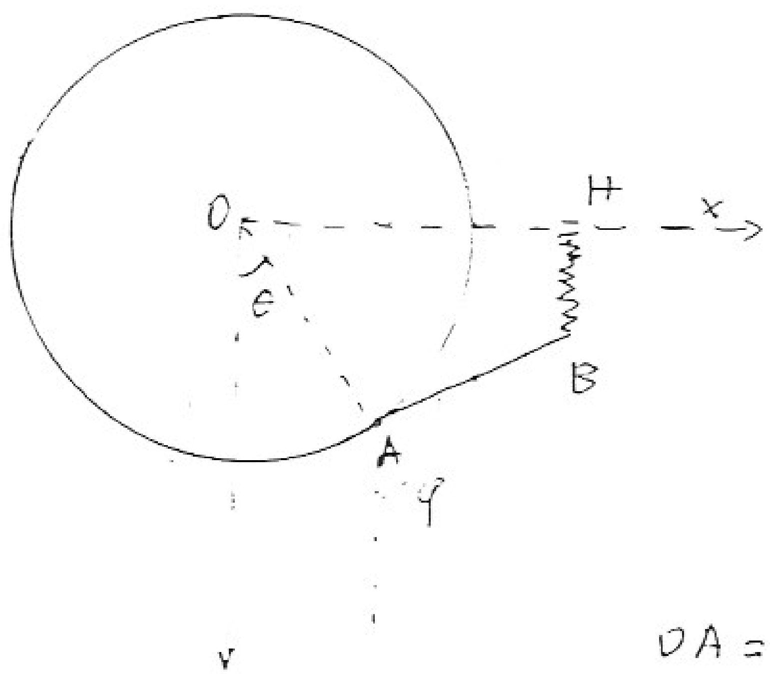
In un piano verticale π si muove una asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L. L'estremo A è obbligato a scorrere lungo una guida circolare di centro O e raggio R=L. L'altro estremo B è soggetto alla forza $\underline{F} = - k \overline{HB}$ ($k > 0$). ove H è la proiezione ortogonale di B sull'asse orizzontale Ox (vedi figura).

Scegliamo come variabili Lagrangiane gli angoli θ e φ che rispettivamente OA e AB formano con la verticale discendente.

1) Scrivere le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilità.

3) Trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



OA = AB = R

Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito Esame ~~24/9/96~~ 8-10-96

In un piano verticale π si muove un anello pesante di centro C, massa M e raggio R. Due estremi di un diametro di tale anello, detti A e B, sono obbligati a scorrere senza attrito lungo una guida verticale z. Un punto materiale pesante P di massa m è obbligato a scorrere senza attrito lungo l'anello ed è anche soggetto alla forza: $F = - k\, OP$ ($k > O$) ,ove O è un punto fisso della guida z.

Scegliamo come variabili Lagrangiane la quota del punto C , z_C e l'angolo θ che CP forma con la verticale discendente .

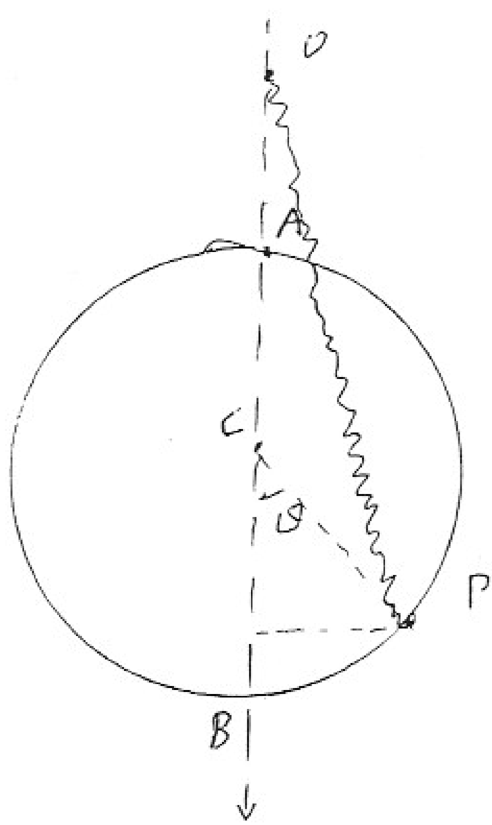
1) Scrivere le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilità.

3) Trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Discutere brevemente se il momento della quantità di moto del punto P rispetto ad O ~~è~~ sia una costante del moto.

5) Scrivere le equazioni di Hamilton-Jacobi del sistema.



Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito Esame 9/9/96

In un piano verticale π si muove un triangolo equilatero di vertici O,A,B, composto da tre sbarre omogenee pesanti ciascuna di massa M e lunghezza L . Il triangolo è obbligato a ruotare senza attrito attorno al suo vertice O supposto fisso. Un punto pesante P di massa m è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida di massa trascurabile solidale alla sbarra AB e tale punto è soggetto (oltre alla forza peso) ad una forza elastica $F = - k\, CP$ ($k>0$), ove C è il punto mediano tra A e B.

Scegliamo come variabili Lagrangiane l'angolo θ che OC forma con l'asse verticale discendente e la distanza (in segno) ξ di P da C.

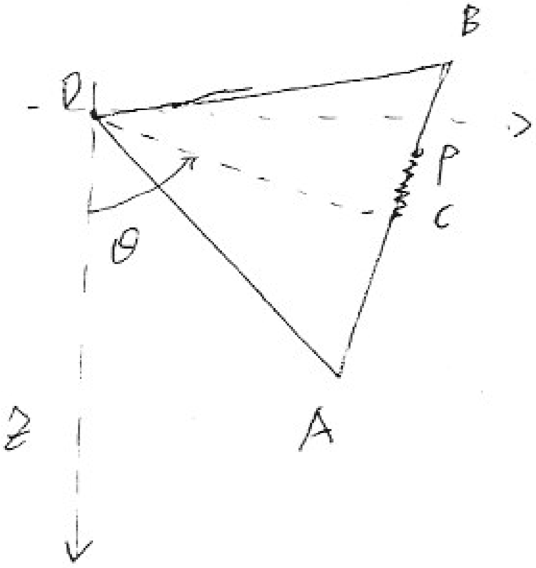
1) Scrivere le equazioni del moto del sistema.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Trovare le frequenze nodali delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Discutere se esistono condizioni iniziali per cui si verifica una delle due situazioni:
a) $\xi \to \infty$ quando $t \to \infty$ oppure b) $\theta \to \infty$ quando $t \to \infty$.

5) Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi.



Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito Esonero 29/5/1996 **Compito B**

a) Data la trasformazione dalle (q,p) alle (Q,P):

$$Q = p\,(2q)^{-1} \quad ; \quad P = -\,q^2\,p^{-\beta}$$

trovare i valori di β per cui essa è completamente canonica. Per tali valori di β trovare la funzione generatrice in (q, Q)

b) In un piano verticale π si muove una asta omogenea AB pesante di lunghezza L e massa M. L'estremo A scorre senza attrito lungo una guida orizzontale x. Sull'asta alla distanza L/4 da A è saldato un punto materiale di massa m.

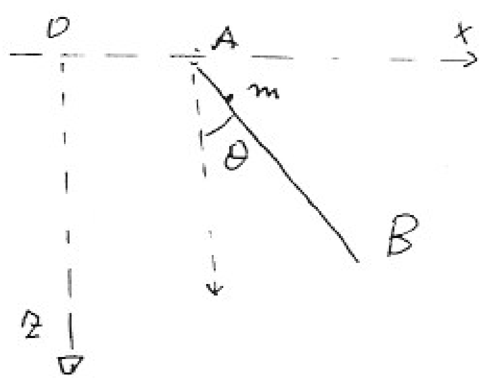
Scegliamo come variabili lagrangiane l'ascissa x_A di A lungo la guida e l'angolo θ che l'asta forma con la verticale discendente.

1) Scrivere le equazioni del moto del sistema.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Date le condizioni iniziali: $x_A = 0$, $\dot{x}_A = 0$, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, trovare i valori di $\dot{\theta}_0$ per i quali l'asta effettua un giro completo su se stessa.

4) Trovare l'Hamiltoniana del sistema e scrivere le equazioni di H-J .



Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

II Compito Esonero 10/5/1996 **Compito ~~A~~ B**

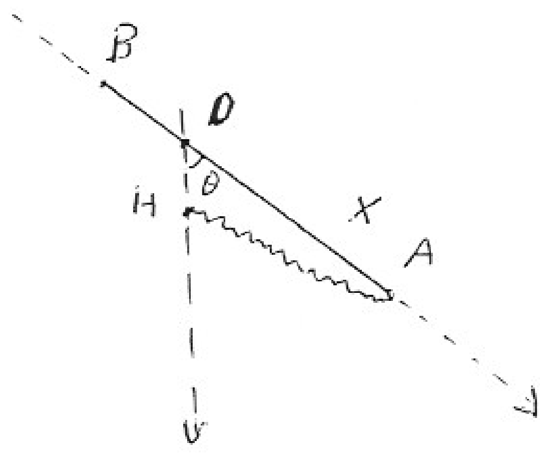
In un piano verticale π è posta una guida di massa trascurabile libera di ruotare attorno ad un punto O. Su tale guida è libera di scorrere senza attrito una asta omogenea pesante di massa M , lunghezza L ed estremi A e B. Sia H un punto posto sulla verticale discendente passante per O a distanza L/4 da O. L'asta è soggetta, oltre alla forza peso ed alla reazione vincolare, ad una forza $\underline{F} = - k\, HA$ ($k > 0$).

Scegliamo come variabili lagrangiane l'ascissa x di A lungo la guida con origine in O e l'angolo θ che tale guida forma con la verticale discendente.

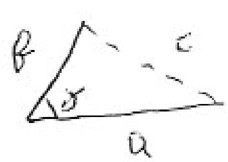
1) Scrivere le equazioni del moto del sistema.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilità.

3) Scelta una posizione di equilibrio stabile, trovare le frequenze delle piccole oscillazioni.



Teorema di Carnot



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Esonero di Meccanica Razionale del 27/3/96 (Prof. Marchioro) B

Si consideri un punto materale di massa unitaria che si muove sulla retta reale sotto l'azione di una forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Si risponda alle seguenti domande:

1. Svolgere l'analisi qualitativa: cioé discutere, al variare dell'energia E dei moti, se le traiettorie sono periodiche, illimitate, a meta asintotica, eccetera, e discutere la stabilità o meno degli eventuali punti di equilibrio.

2. Si dia una stima del periodo quando $E = \frac{1}{26}$.

3. Si consideri il dato iniziale $x(t=0) = 0, v(t=0) = 2$. Si dia un stima dall'alto e dal basso del tempo $T(L)$ al quale viene raggiunto il punto $x = L$, per $L > 0$.

Facoltativo. Nelle condizioni della domanda 3 si trovi

$$lim_{L \to +\infty} \frac{T(L)}{L}.$$

Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito Esame 26/2/96

Si risolvano i due seguenti problemi:

I)

Data la seguente trasformazione : $(q,p) \Leftrightarrow (Q,P)$

$$q = -\frac{1}{8} P Q^{-7} \quad ; \quad p = P^{\alpha} Q^{8} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

trovare i valori di α per cui essa è canonica e trovarne la funzione generatrice $F(q,Q)$.

II)

Una sbarra omogenea di estremi A e B , di massa M e lunghezza L si muove in un piano orizzontale. L'estremo A è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea r, mentre l'altro estremo B è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida circolare di centro O e raggio R, ove il punto $O \in r$. Solidalmente alla sbarra è posta una guida rettilinea di massa trascurabile e su tale guida si muove senza attrito un punto P di massa m soggetto alla forza attiva $\underline{F} = -k\, OP$, $k > 0$. Studiamo il sistema per $L = R$.

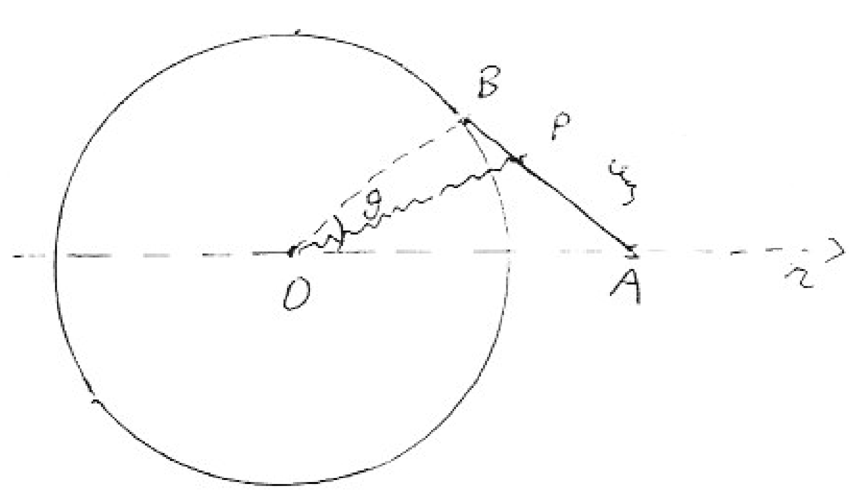
Scegliamo come variabili Lagrangiane l'angolo θ che OB forma con la guida r e la distanza (in segno) ξ di P da A.

1) Scrivere le equazioni del moto del sistema.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Trovare se esistono altre condizioni iniziali, oltre quelle di equilibrio, per le quali l'angolo θ rimane costante nel tempo.

$\overline{OB} = \overline{BA} = R$



Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito Esame 10/10/95

In un piano orizzontale è individuato un sistema cartesiano ortogonale Oxy. In tale piano si muove una sbarra omogenea di massa M, lunghezza L e di estremi A e B. L'estremo A è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida solidale con l'asse y, mentre l'estremo B è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida solidale all'asse x. Inoltre un punto materiale P di massa m è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida di massa trascurabile solidale alla sbarra. Infine tale punto P è soggetto alla forza attiva $\underline{F} = -k\,OP$ $(k>0)$.

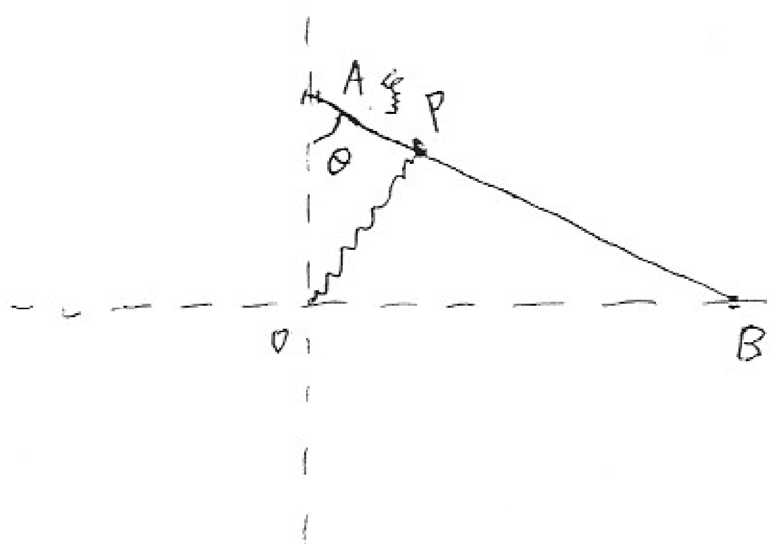
Scegliamo come variabili lagrangiane l'angolo θ che la sbarra forma con l'asse y e l'ascissa ξ del punto P in un sistema cartesiano lungo la sbarra AB con origine in A.

1) Scrivere le equazioni del moto del sistema.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Scrivere le equazioni di Hamilton-Jacobi.



Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito Esame 20/9/95

In un piano verticale una guida r di massa trascurabile è libera di ruotare senza attrito attorno ad un punto fisso O. Una sbarretta omogenea pesante di estremi A e B, lunghezza L, massa M è libera di scorrere senza attrito sulla guida r. Tale sbarretta è sottoposta , oltre alla forza peso, a due forze elastiche: $\underline{F}_1 = -\,k\,OA$, $\underline{F}_2 = -\,OB$ ($k > 0$).

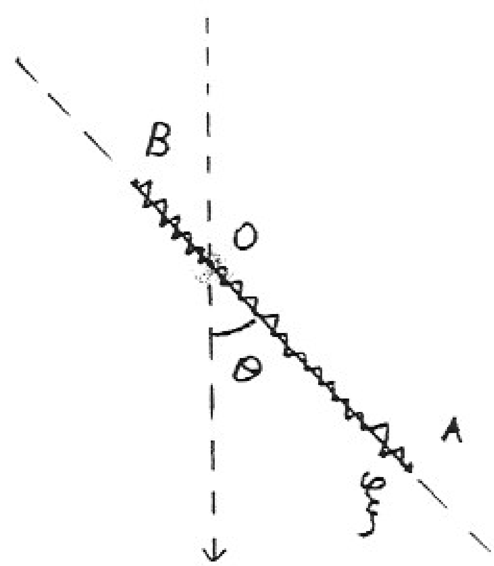
Scegliamo come variabili lagrangiane l'angolo θ che la sbarretta forma con la verticale discendente e l'ascissa ξ del punto A in un sistema cartesiano lungo la guida r e con origine in O.

1) Scrivere le equazioni del moto del sistema.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Discutere se esistano dati iniziali per cui $\xi \to \infty$ quando $t \to \infty$ (t = tempo).



Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito Esame 11/7/95

In un piano orizzontale si muovono due sbarrette omogenee di lunghezza L e massa M e di estremi rispettivamente A,B e B,C, incernierate tra loro nel punto B , ma libere di ruotare senza attrito. Gli estremi A e C sono obbligati a scorrere senza attrito lungo un asse fisso x. Sono soggette alle forze: $\underline{F}_1 = -k\, H_1A$, $\underline{F}_2 = -k\, H_2C$ ($k > 0$) ,ove H_1 e H_2 sono i punti dell'asse x di ascisse ($-L/2$), ($L/2$).

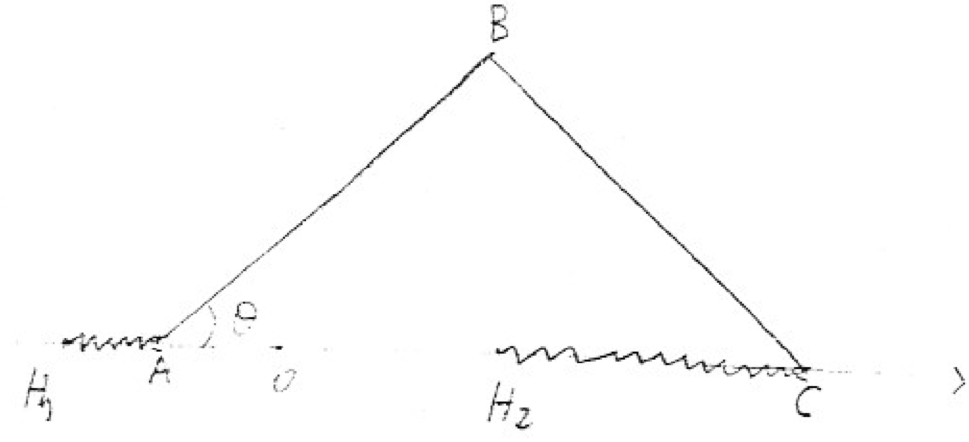
Scegliamo come variabili lagrangiane l'ascissa di A x_A e l'angolo θ che AB forma con l'asse x.

1) Scrivere le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Individuare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile

4) Trovare l'Hamiltoniana del problema e scrivere le equazioni di Hamilton-Jacobi.



Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito Esame 6/6/95

Si risolvano i due seguenti problemi:

I)

Data la seguente trasformazione : $(q,p) \leftrightarrow (Q,P)$

$$q = P^{\alpha} \quad ; \quad p = P^2 - Q \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

trovare i valori di α per cui essa è canonica e trovarne la funzione generatrice $F(q,Q)$.

II)

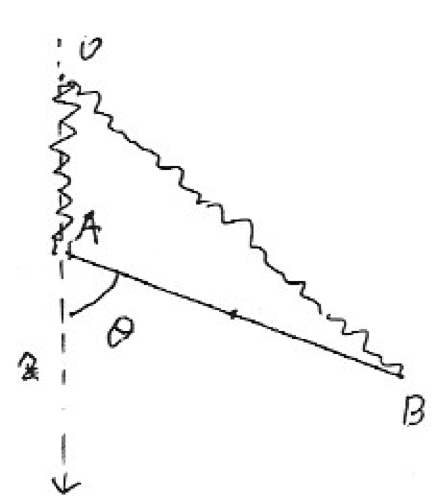
In un piano verticale è posta una asta pesante omogenea AB di lunghezza L e massa M. L'estremo A dell'asta è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida verticale z passante per un punto fisso O. L'asta è soggetta alla forza peso ed a due forze elastiche $\underline{F}_1 = -k\,OA$ e $\underline{F}_2 = -k\,OB$, $k > 0$.

Scegliamo come variabili lagrangiane la quota z del punto A e l'angolo θ che AB forma con la verticale discendente.

a) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni differenziali del moto, esaminando l'esistenza di moti traslatori.

b) Per semplicità di scrittura scelte unità di misura per cui $L = 1$, $M = 1$, $g = 1$ (g=Accelerazione di gravità), dedurre le posizioni di equilibrio e discuterne il numero al variare di k . Inoltre posto $k = 2$ discutere la stabilità delle varie posizioni di equilibrio trovate.

c) Proseguendo il punto b) ,individuare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



COMPITO A

Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

III Compito Esonero 1/6/95

Si risolvano i due seguenti problemi:

I)

Data la seguente trasformazione : $(q,p) \leftrightarrow (Q,P)$

$$q = -\frac{1}{4} Q^{\alpha} P \quad ; \quad p = Q^{\beta} \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

trovare i valori di α , β per cui essa è canonica e trovarne la funzione generatrice $F(q,Q)$.

II)

In un piano verticale è posto un disco omogeneo di centro C, massa M e raggio R, che rotola senza strisciare lungo un asse orizzontale x. In tale piano è posta una asta omogenea pesante di massa m e lunghezza L = R ed i cui estremi A e B sono obbligati a scorrere senza attrito lungo una guida liscia solidale alla circonferenza del disco.

Scegliamo come variabili lagrangiane l'ascissa x_c del centro del disco e l'angolo θ che CH forma con la verticale discendente, ove H è il punto di mezzo dell'asta AB.

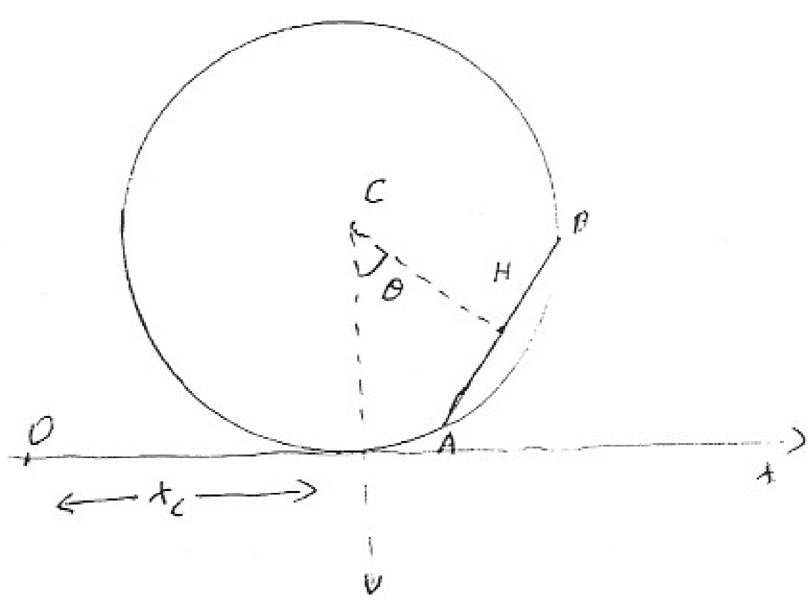
a) Scrivere le equazioni del moto con il metodo di Lagrange.

b) Trovare due integrali primi e, tramite questi, considerando le seguenti condizioni iniziali :

$$x_c(0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}_c(0) = 0 \quad ; \theta(0) = 0 \quad ; \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

trovare i valori di $\dot{\theta}_0$ per cui l'asta compie una rotazione completa.

c) Scrivere prima l'Hamiltoniana e poi l'equazione di Hamilton-Jacobi .



Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Esonero del 17/5/95

In un piano verticale π è posto un disco omogeneo di massa M e raggio R e libero di ruotare senza attrito attorno al suo centro fisso C. Un punto P pesante di massa m è libero di scorrere senza attrito lungo una guida circolare appartenente al piano π, di centro C e raggio $a < R$.

Tale punto è soggetto a due forze attive, la forza peso, e la forza $\underline{F} = -k\,QP$, $k > 0$, ove Q è un punto solidale al disco e posto sul suo bordo.

Scegliamo come variabili lagrangiane gli angoli θ e φ che i vettori CP e CQ formano rispettivamente con la verticale discendente.

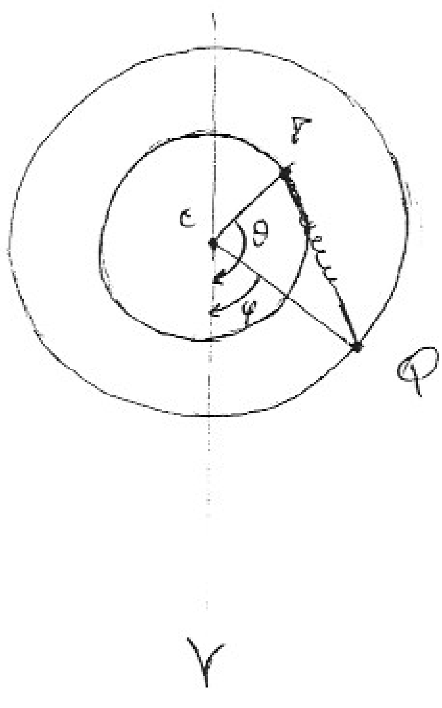
1) Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.

2) Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Studiare le piccole oscillazioni nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile.

Facoltativo.

Nell'ipotesi del punto 3) trovare le posizioni nello spazio delle fasi per cui è massima la componente verticale della reazione vincolare su P, quando $\theta(0) = 0$, $\dot\theta(0) = \dot\theta_0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot\varphi(0) = 0$.



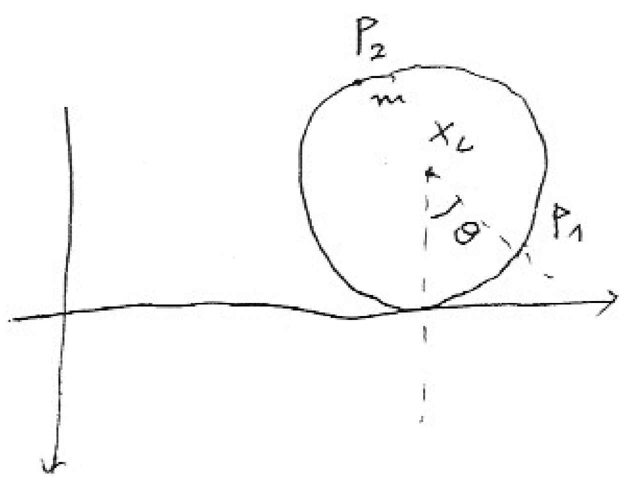
Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito del 23/2/95

Risolvere il seguente problema.

Un disco omogeneo pesante di centro C, raggio R e massa M è posto in un piano verticale ed è libero di rotolare senza strisciare lungo una guida orizzontale x. Un punto P_1 pesante, di massa m, è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida solidale alla circonferenza del disco. Un secondo punto pesante P_2 di massa m è posto su tale circonferenza ed è solidale al disco. Scegliamo come variabili lagrangiane atte ad individuare le generica posizione del sistema l'ascissa x_c del centro del disco e l'angolo θ che CP forma con la verticale discendente (vedi figura).(Assumiamo che inizialmente x_c sia uguale a zero e P_2 sia nel punto più basso).

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
3) Studiare le piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



Meccanica Razionale: compito di esonero del 7/4/95 (Prof. C.Marchioro).

Compito A

Un punto materiale di massa unitaria e di ascissa x si muove in una dimensione sotto l'azione del campo di forze di energia potenziale

$$V(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + bx^2; \qquad a > 0.$$

1) Si studi, al variare dei parametri a e b, la stabilita' della origine, e si dica per quali valori dei parametri a e b tutte le orbite sono limitate.

2) Sia $b = 0$, si stimi il periodo del moto per ogni valore della energia E.

3) Per $b = 0$ ed $a = 1$ si calcoli il limite per $E \to \infty$ di

$$\frac{T(E)}{\sqrt{E}};$$

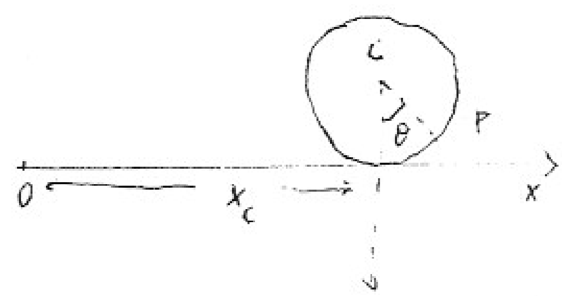
dove con $T(E)$ abbiamo indicato il periodo dell'orbita periodica di energia E.

Meccanica Razionale.(matematici) (Prof. Marchioro)

Compito del 20/9/1994

Risolvere i due seguenti problemi.

a)
Un disco omogeneo pesante di centro C, raggio R e massa M è posto in un piano verticale ed è libero di rotolare senza strisciare lungo una guida orizzontale x. Un punto P pesante, di massa m, è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida solidale alla circonferenza del disco. Scegliamo come variabili lagrangiane atte ad individuare le generica posizione del sistema l'ascissa x_c del centro del disco e l'angolo θ che CP forma con la verticale discendente (vedi figura).
1) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
2) Trovare due integrali primi del sistema e tramite questi rispondere al seguente quesito: date le condizioni iniziali $x_c(0) = 0$, $\dot{x}_c(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0$, trovare il valore di $\dot{\theta}_0$ per cui il punto P fa un giro completodella circonferenza.



b)
Data la trasformazione dalle variabili (q,p) alle nuove variabili (Q,P)

$$Q = q^{\alpha} \ \frac{p}{2} - 1 \qquad ; \qquad P = -q^2 \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

trovare il valore del parametro α per cui essa è canonica. In questo caso trovarne la funzione generatrice.

Meccanica Razionale . Compito del 20/6/94 Prof.C.Marchioro

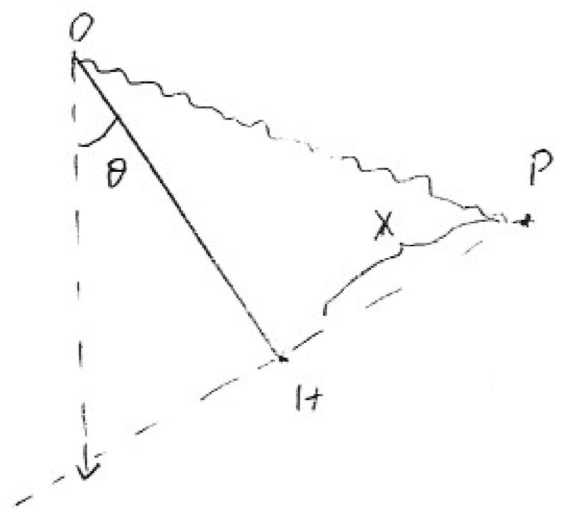
Una sbarra rigida omogenea pesante OH di lunghezza L e massa M è posta in un piano verticale ed è libera di ruotare senza attrito attorno al suo estremo O . Per l'altro estremo H passa una guida di massa trascurabile ortogonale alla sbarra. Lungo tale guida si muove senza attrito un punto materiale pesante P di massa m. Esso è soggetto oltre al peso ad una forza elastica $F = -k\,OP$, $k > 0$.

Scegliamo come variabili lagrangiane l'angolo θ che la sbarra forma con la verticale discendente e l'ascissa x del punto P lungo la guida.

1) Scrivere le equazioni di moto del sistema.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilità.

3) Studiare le piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



$\overline{HP} = x$