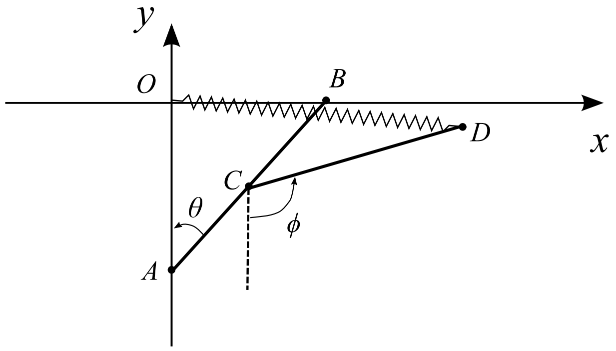
Esercizio n. 1



Es. 1

Un sistema meccanico è composto da due sbarre omogenee uguali di massa m e lunghezza a, vincolate a muoversi su un piano verticale. La sbarra AB ha l'estremo B vincolato a muoversi senza attrito lungo l'asse orizzontale x mentre l'estremo A è vincolato a muoversi senza attrito lungo l'asse verticale y di un sistema di riferimento Oxy. La sbarra CD ha l'estremo C vincolato al punto di mezzo della sbarra AB, e può ruotare liberamente intorno ad esso. L'estremo D è soggetto ad una forza elastica di costante elastica k verso il punto O: $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OD}$. Oltre alla forza elastica, il sistema è soggetto alla forza gravitazionale.

Utilizzando come coordinate Lagrangiane gli angoli θ e ϕ mostrati in figura si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange;
2. Verificare se le configurazioni $(\theta, \phi) = (0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$, (π, π) sono di equilibrio e, in caso affermativo, valutarne la stabilità.
3. Studiare la stabilità della configurazione $(\theta, \phi) = (0, 0)$ al variare di k.
4. Studiare le piccole oscillazioni intorno alla configurazione $(\theta, \phi) = (0, 0)$.
5. Determinare eventuali altre configurazioni di equilibrio al variare di k.
6. Si ponga $g = 0$, ossia il sistema si muove in assenza di gravità. Verificare che la Lagrangiana è invariante rispetto al gruppo di trasformazioni a un parametro $(\theta, \phi) \to (\theta + \alpha, \phi + \alpha)$ con α qualsiasi, e determinare la carica di Nöther associata.
7. In riferimento al punto precedente, verificare che la carica di Nöther è un invariante del moto.

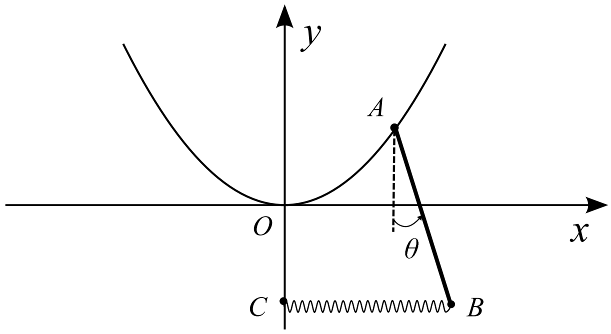
Esercizio n. 2

Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{p} = 2pq - 2q^3, \\ \dot{q} = p - q^2. \end{cases}$$

1. Si verifichi che tale sistema è Hamiltoniano e se ne calcoli la Hamiltoniana corrispondente.
2. Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione $S(q, P)$ che mappi la Hamiltoniana calcolata al punto precedente in $K(Q, P) = P^2/2$.
3. Si determini la trasformazione canonica $(q, p) \to (Q, P)$ generata da $S(q, P)$ e la sua inversa $(Q, P) \to (p, q)$.
4. Si usi la trasformazione canonica determinata per risolvere le equazioni del moto con le condizioni iniziali $q(0) = 1$ e $p(0) = 4$.
5. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni del moto originali.
6. Si disegni la traiettoria nello spazio delle fasi (q, p)

Esercizio n. 3



Un sistema meccanico è composto da una sbarra omogenea di massa m e lunghezza a, vincolata a muoversi su un piano verticale. L'estremo A è vincolato a muoversi senza attrito lungo una guida parabolica verticale di equazione $y = \frac{x^2}{2a}$, del sistema di riferimento Oxy con l'asse y coincidente con l'asse di simmetria della guida. Sull'estremo B agisce una forza elastica $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{CD}$, dove C è la proiezione del punto B sull'asse y. Oltre alla forza elastica, il sistema è soggetto alla forza gravitazionale.

Utilizzando come coordinate Lagrangiane la coordinata x dell'estremo A della sbarra e l'angolo θ mostrato in figura si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange;
2. Verificare se le configurazioni $(x, \theta) = (0, 0)$, $(0, \pi/2)$, $(0, \pi)$ sono di equilibrio e, in caso affermativo, valutarne la stabilità.
3. Studiare la stabilità della configurazione $(x, \theta) = (0, 0)$ al variare di k.
4. Determinare eventuali altre configurazioni di equilibrio al variare di k.
5. Studiare le piccole oscillazioni intorno alla configurazione $(x, \theta) = (0, 0)$.
6. Calcolare la Hamiltoniana associata.
7. Calcolare la Hamiltoniana che descrive le piccole oscillazioni vicino alla configurazione $(x, \theta) = (0, 0)$, e scrivere le relative equazioni di Hamilton.
8. Utilizzare i risultati del punto precedente per calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni.

Esercizio n. 4

Si consideri la seguente Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{4} q \dot{q}^2 - \frac{1}{q},$$

con $q > 0$.

1. Individuare un integrale primo del moto.
2. Utilizzare l'integrale primo trovato per integrare mediante quadrature le equazioni del moto con condizioni iniziali $q(0) = q_0$ e $p(0) = 0$.
3. Determinare la Hamiltoniana associata ad L.
4. Scrivere e risolvere le equazioni di Hamilton con condizioni iniziali $q(0) = q_0$ e $p(0) = 0$.
5. Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione $S(q, P)$ che mappi la Hamiltoniana calcolata al punto precedente in $K(Q, P) = P$.
6. Determinare la trasformazione canonica da (q, p) a (Q, P) generata da $S(q, P)$ e la sua inversa da (Q, P) a (p, q).
7. Utilizzare la trasformazione canonica trovata per risolvere le equazioni del moto con le condizioni iniziali $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$.
8. Disegnare le traiettorie nello spazio $(q, \dot{q})$ e (q, p).

Esercizio n. 5

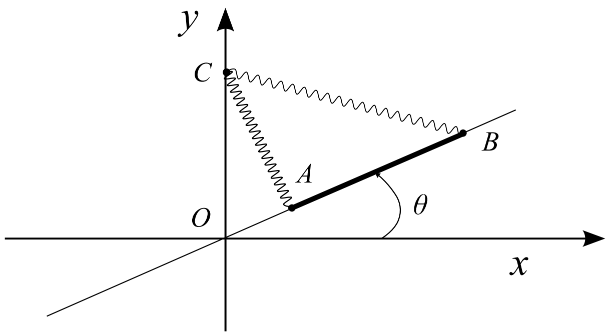
Si consideri la seguente Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\Big[q^2p^2 + (\ln p)^2\Big],$$

con $p > 0$.

1. Scrivere le equazioni di Hamilton.
2. Verificare che $H(q,p)$ è un integrale primo del moto.
3. Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione $F(p,P)$ che mappi la Hamiltoniana calcolata al punto precedente in $K(Q,P) = P^2/2$.
4. Determinare la trasformazione canonica da (q,p) a (Q,P) generata da $F(p,P)$ e la sua inversa da (Q,P) a (p,q).
5. Utilizzare la trasformazione canonica trovata per risolvere le equazioni del moto con le condizioni iniziali $p(0) = 1$ e $q(0) = q_0$ generico.
6. Verificare esplicitamente che la soluzione trovata risolva le equazioni del moto originali.
7. Disegnare la traiettoria del moto nello spazio delle Fasi (q,p) al variare di q_0, ovvero di $E = H(q,p)$.

Esercizio n. 6



In un piano verticale è posta una guida rettilinea di massa trascurabile libera di ruotare intorno all'origine O di un sistema di riferimento ortonormale Oxy, con l'asse y diretto secondo la verticale ascendente. Sulla guida può scorrere senza attrito una sbarra omogenea di massa m e lunghezza $2a$. Gli estremi A e B della sbarra sono collegati mediante molle, di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k, al punto C di coordinate $(0, a/2)$. Oltre alle forze elastiche, il sistema è soggetto alla forza gravitazionale.

Utilizzando come coordinate Lagrangiane la distanza ξ del centro di massa G della sbarra dall'origine O misurata lungo la guida, e l'angolo θ formato dalla guida con l'asse x, come mostrato in figura, si chiede:

1. La Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Le configurazioni di equilibrio del sistema, e la loro stabilità al variare di k.
3. Studiare le piccole oscillazioni intorno alle configurazioni di equilibrio.
4. Calcolare la Hamiltoniana associata e scrivere le equazioni di Hamilton.
5. Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione $S(\xi, \theta, P_1, P_2)$ che trasforma la Hamiltoniana originale in $K(P_1, P_2)$.
6. Fissato $k = -mg/a$ e preso $S(\xi, \theta, P_1, P_2) = S_0(\xi, P_1, P_2) + S_1(\theta, P_2)$ scrivere le equazioni di Hamilton-Jacobi per $S_0(\xi, P_1, P_2)$ e $S_1(\theta, P_2)$.
7. Fissato $P_2 = 0$ risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi con $K(P_1, P_2) = P_1^2/2m$ e determinare la trasformazione canonica associata.
8. Utilizzare la trasformazione canonica per risolvere le equazioni del moto del sistema per $k = -mg/a$.

Esercizio n. 7

Data la seguente Hamiltoniana

$$H(q,p) = (qp)^3 + 2\ln q$$

con $q > 0$ si chiede:

1. Determinare per quali valori di a e b la trasformazione

$$\begin{cases} q = e^{-aP}, \\ Q = p^b e^{-aP}. \end{cases}$$

   è canonica, e trovare la relativa funzione generatrice $F(p,P)$.

2. Applicare la trasformazione canonica generata da $F(p,P)$ alla Hamiltoniana data.
3. Risolvere le equazioni di Hamilton per le variabili (Q,P), ed utilizzare la soluzione trovata per determinare il moto $(q(t),p(t))$ nelle variabili originali con le condizioni $q(0) = q_0 > 0$ e $p(0) = 0$.
4. Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione $S(q,P)$ che mappi la Hamiltoniana data $K(Q,P) = P$.
5. Determinare la trasformazione canonica da (q,p) a (Q,P) generata da $S(q,P)$ e la sua inversa da (Q,P) a (p,q).
6. Utilizzare la trasformazione canonica trovata per risolvere le equazioni del moto con le condizioni iniziali $q(0) = q_0 > 0$ e $p(0) = 0$.
7. Verificare esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni del moto originali.

Esercizio n. 8

Data la seguente Lagrangiana

$$L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}\left[(1 + x^2)\dot{x}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2\right] - \frac{k}{2}\left[(x + \cos\theta)^2 - \lambda x^2\right],$$

con $\lambda > 0$ si chiede:

1. Determinare un integrale primo del moto.
2. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema, e la loro stabilità.
3. Determinare la Hamiltoniana associata, e le relative equazioni di Hamilton.
4. Linearizzare le equazioni di Hamilton vicino ai punti di equilibrio stabile del sistema e calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni.

Esercizio n. 9

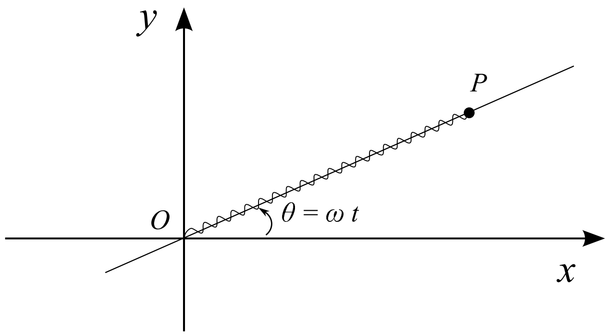
Data la seguente Hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\left[p_1^2 + \frac{(p_1 - p_2)^2}{q_1^2 + 1}\right] + \frac{1}{2}q_1^2 + \alpha(q_1 \sin q_2 - 2\cos q_2),$$

dove α è un parametro reale che può assumere sia valori positivi sia negativi. Si chiede:

1. Determinare le equazioni di Hamilton associate.
2. Utilizzando le equazioni trovate verificare che la Hamiltoniana è un integrale primo del moto.
3. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema, e la loro stabilità in funzione del parametro α.
4. Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabile in funzione del parametro α.
5. Per ogni punto di equilibrio del sistema determinare i relativi modi normali di vibrazione nel piano (q_1, q_2).
6. Mostrare che $q_1 = 0$ $p_1 = p_2/2$ è soluzione delle equazioni di Hamilton.
7. Mostrare che $H(0, q_2, \frac{p_2}{2}, p_2)$ è un invariante del moto.

Esercizio n. 10
(Lagrangiana ed Equazione di Lagrange)



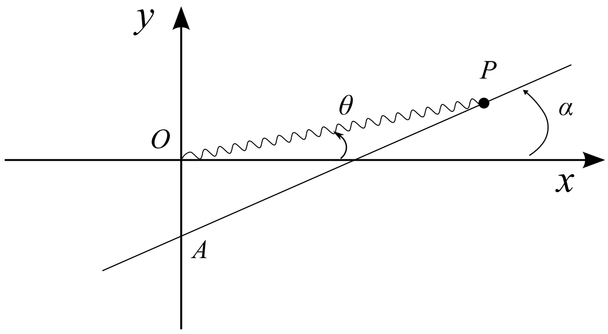
In un piano orizzontale è posta una guida rettilinea di massa trascurabile passante per l'origine O di riferimento ortonormale Oxy. La guida è mantenuta in rotazione con velocità angolare costante ω.

Un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo la guida ed è collegato all'origine del sistema di riferimento mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile.

Si chiede:

1. Determinare le forze agenti sul punto materiale.
2. Utilizzando come coordinate lagrangiane la distanza r del punto P dall'origine O e l'angolo θ formato dalla guida con a direzione positiva dell'asse x, scrivere la Lagrangiana del sistema.
3. Determinare le equazioni del moto e discutere le possibili soluzioni in funzione della velocità di rotazione ω.
4. Determinare la reazione vincolare esercitata dalla guida sul punto.

Esercizio n. 11 (Coordianate Lagrangiane)



In un piano verticale è posta una guida rettilinea di massa trascurabile che forma un angolo α con l'asse x di riferimento ortonormale Oxy e passante per il punto $A = (0, -a)$, con $a > 0$. Un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo la guida ed è collegato all'origine del sistema di riferimento mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile. Sul punto, oltre alla forza elastica, agisce la la forza peso.

Si chiede:

1. Determinare tutte le forze agenti sul punto materiale.

2. Utilizzando come coordinate lagrangiane la distanza r del punto P dall'origine O e l'angolo θ formato dal raggio $\overrightarrow{OP}$ con la direzione positiva dell'asse x, scrivere l'energia cinetica del sistema e determinare le equazioni del moto utilizzando l'equazione di Lagrange del primo tipo.

3. Utilizzando come coordinata lagrangiana la distanza ξ del punto P dal punto A misurata lungo la guida, scrivere l'energia cinetica del sistema e determinare le equazioni del moto utilizzando l'equazione di Lagrange del primo tipo.

4. Risolvere l'equazione del moto e determinare la reazione vincolare esercitata dalla guida sul punto.

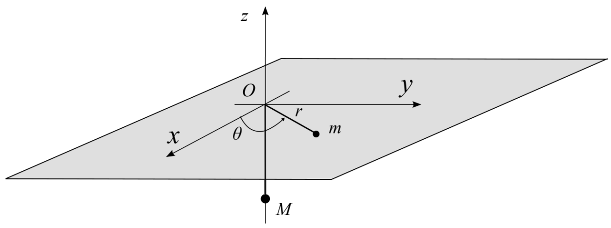
Esercizio n. 13
(Equazione Lagrange primo tipo)

Un punto materiale di massa m si muove sotto l'azione di una forza $\mathbf{F}$. Indicato con $\mathbf{r} = (x, y, z)$ la sua posizione rispetto ad un sistema di riferimento $Oxyz$, si chiedono le equazioni del moto del punto rispetto al sistema di riferimento $Ox'y'z'$ con asse $z' = z$ e ruotante intorno ad esso con con velocità angolare costante ω:

$$x' = x\cos(\omega t) + y\sin(\omega t),$$
$$y' = -x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t).$$

Si utilizzi l'equazione di Lagrange di primo tipo.

Esercizio n. 14
(Coordinate cicliche e riduzione)

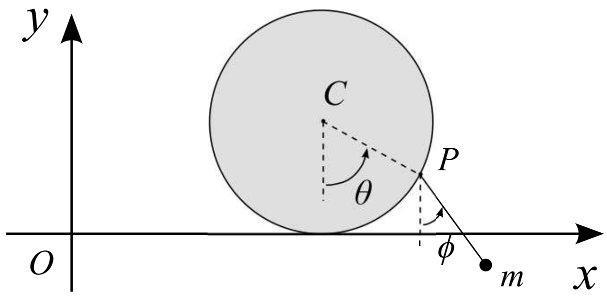


Una massa puntiforme m, vincolata a muoversi sul piano orizzontale xy di un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$, ed una seconda massa M, vincolata a muoversi lungo l'asse verticale z, sono collegate mediante un filo inestensibile di lunghezza a e massa trascurabile passante per l'origine del sistema $Oxyz$, come mostrato in figura. Sul sistema agisce la forza di gravità.

Usando come coordinate lagrangiane le coordinate polari r e θ che individuano la posizione della massa m sul piano, si chiede:

1. La Lagrangiana e le equazioni del moto.
2. Le reazioni vincolari agenti sul sistema.
3. Ridurre il problema ad un solo grado di libertà per la coordinata r scrivendo la Lagrangiana e l'equazione del moto corrispondente per un valore fissato del momento coniugato p_θ.
4. L'energia generalizzata per il problema ad un solo grado di libertà e verificare che è una costante del moto.
5. Utilizzando l'energia generalizzata integrare per quadrature l'equazione del moto di r per p_θ fissato.
6. Discutere le posizioni di equilibrio del sistema ridotto per p_θ fissato e calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile.

Esercizio n. 15
(Lagrange/Hamilton, piccole oscillazioni)



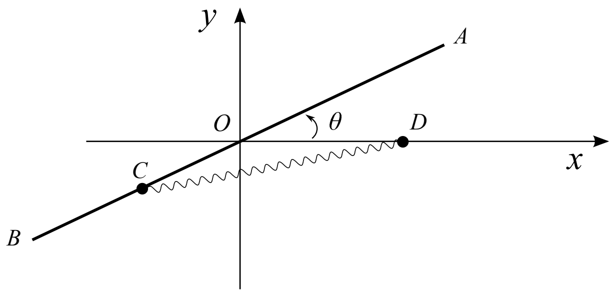
Un disco uniforme di massa $M = 2m$ e raggio a può rotolare senza strisciare su un piano orizzontale. Sul punto P posto sul bordo del disco è attaccata un'asta rigida di lunghezza a e massa trascurabile al cui estremo opposto è attaccata una massa puntiforme m.

Si utilizzino come coordinate la posizione x del centro C del disco, l'angolo θ che individua la posizione del punto P rispetto alla verticale passante per il centro C del disco e l'angolo ϕ che individua la posizione della massa m rispetto alla verticale passante per il punto P.

Si chiede:

1. La Lagrangiana e le equazioni del moto.
2. La tensione esercitata dalla sbarra sulla massa m.
3. I punti di equilibrio del sistema e la loro strabilità.
4. La frequenza delle piccole oscillazioni intorno ai punti di equilibrio, e discutere qualitativamente il moto individuando le direzioni principali di oscillazione (sia stabili sia instabili).
5. La Hamiltoniana associata e le equazioni di Hamilton.
6. La frequenza delle piccole oscillazioni intorno ai punti di equilibrio nella formulazione Hamiltoniana.
7. Determinare le direzioni principali di oscillazione nella formulazione Hamiltoniana e confrontare con i risultati ottenuti con la formulazione Lagrangiana.

Esercizio n. 16
(Lagrange/Hamilton, piccole oscillazioni)



Una sbarra omogenea di massa M e lunghezza $2a$ può ruotare senza attrito nel piano verticale xy [x orizzontale e y verticale] del sistema di assi cartesiani $Oxyz$ intorno al suo centro O coincidente con l'origine del sistema di riferimento. Una massa puntiforme C di massa m è fissata alla sbarra a distanza $a/2$ dall'estremo B della sbarra. Una seconda massa puntiforme D di massa m può muoversi senza attrito lungo l'asse x. Le masse C e D sono collegate mediante una molla di costante elastica k e massa e lunghezza a riposo trascurabili.

Si utilizzino come coordinate la posizione x della massa D e l'angolo θ che la sbarra forma con l'asse x.

Si chiede:

1. La Lagrangiana e le equazioni del moto.
2. I punti di equilibrio del sistema e la loro strabilità.
3. La frequenza delle piccole oscillazioni intorno ai punti di equilibrio, e discutere qualitativamente il moto individuando le direzioni principali di oscillazione (sia stabili sia instabili).
4. La Hamiltoniana associata e le equazioni di Hamilton.
5. La frequenza delle piccole oscillazioni intorno ai punti di equilibrio nella formulazione Hamiltoniana.
6. Determinare le direzioni principali di oscillazione nella formulazione Hamiltoniana e confrontare con i risultati ottenuti con la formulazione Lagrangiana.

Esercizio n. 17
(Trasformazioni Canoniche)

Data la Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, con $q = (q_1, \ldots, q_n)$ e $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$, si chiede:

1. Mostrare che la Lagrangiana

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}F(q, t)$$

   dove $F(q, t)$ è una generica funzione differenziabile ed $L(q, \dot{q}, t)$ conducono alle stesse equazioni di Eulero-Lagrange.

2. Definendo le Hamiltoniane

$$H(q, p, t) = \sum_h p_h \, \dot{q}_h - L(q, \dot{q}, t)$$

   dove

$$p_h = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} L(q, \dot{q}, t),$$

   e

$$K(Q, P, t) = \sum_h P_h \, \dot{Q}_h - L'(Q, \dot{Q}, t)$$

   con

$$P_h = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_h} L'(Q, \dot{Q}, t),$$

   determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica tra (q, p) e (Q, P).