1. Meccanica Newtoniana e moti unidimensionali

Modello di punto materiale: punto x di massa m

cf. dibattito sulla def di punto

cf. più tardi corpo rigido

I principio: $\exists$ rif. rispetto al quale in assenza di forze il moto è rettilineo uniforme ovvero $\ddot{x} = 0$ (rif. inerziale).

Trasformazioni di Galileo: $\begin{cases} t' = t \\ x' = x - ut \end{cases}$

II principio: $m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$

a. Cominciamo con il caso più semplice: senza attrito

$$f(x,\cancel{\dot{x}},\cancel{t}) = f(x) \qquad \text{"forza conservativa"}$$

dunque

$$m\ddot{x} = f(x)$$

Poniamo
$$\begin{cases} V(x) = -\int_{x_0}^{x} dy\, f(y) \\ f(x) = -\dfrac{dV}{dx} \end{cases}$$

Moltiplichiamo

$$m\ddot{x}\dot{x} = f(x)\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2\right] \qquad -\frac{d}{dt}V(x(t))$$

$T(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2$ energia cinetica

$V(t) = V(x(t))$ energia potenziale

dunque
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + V(x(t))\right] = 0$$

L'energia $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ è una costante del moto

$x_0, \dot{x}_0$ dati iniziali $\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + V(x_0)$

dunque
$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}$$

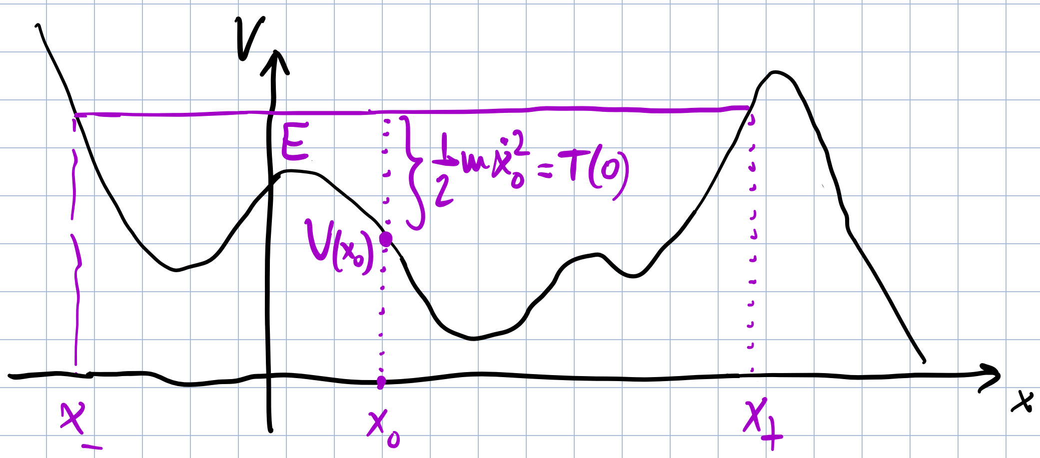
La velocità è una funzione della posizione

Invertiamo

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}} \qquad t(x) = \pm\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(y)]}}$$

Abbiamo risolto per la funzione inversa $t(x)$ ma dobbiamo scegliere il segno. Vari casi possibili.

Moto periodico



Supponiamo $\dot{x}_0 > 0$ $\Rightarrow$ $t(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(y))}}$ vale per $x \leq x_+$

In $x = x_+$ abbiamo $\dot{x} = 0$

Quanto tempo ci vuole ad arrivare in x_+ ?

$$t(x_+) = \lim_{x \to x_+} \int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(y))}}}$$

L'integrando e' singolare per $y = x_+$.
Integrale improprio.

$$E - V(x) \approx -V'(x_+)(x - x_+) = V'(x_+)(x_+ - x)$$

Dunque per $x \to x_+$, $\dfrac{1}{\sqrt{E - V(x)}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{V'(x_+)(x_+ - x)}}$

e dalla teoria degli integrali impropri segue che

il tempo $t_+ = t(x_+)$ e' finito

Al tempo t_+ il punto si trova in x_+ con velocità nulla

$m\ddot{x} = f(x) \approx -V'(x_+) \leq 0$ $\Rightarrow$ il punto riparte all'indietro

$$t(x) = t_+ - \int_{x_+}^{x} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(y))}} = t_+ + \int_{x}^{x_+} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(y))}}$$

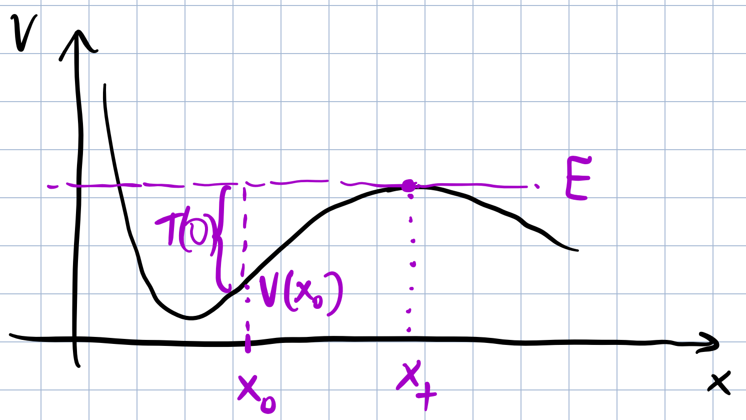
Questo vale fino a $x = x_-$ $\Rightarrow$ $t(x_-) = t_+ + \displaystyle\int_{x_-}^{x_+} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(y))}}$

e così via ...

Periodo $T = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(y))}}$

Esercizio: verificare che per $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Approccio a un punto fisso



Punto fisso $\frac{dV}{dx} = 0$

$m\ddot{x} = 0$

se $x_0 = x_+$, $\dot{x}_0 = 0 \Rightarrow x(t) = x_+$

Stesso ragionamento ma adesso $E - V(x) \sim \frac{1}{2}V''(x_+)(x - x_+)^2$

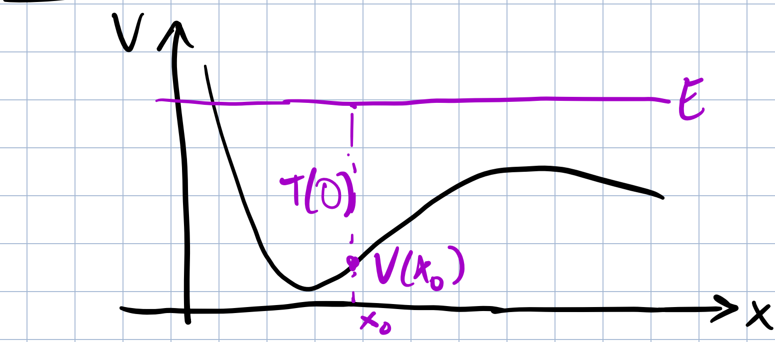
$$t(x_+) = \lim_{x \to x_+} \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(y))}} \approx \lim_{x \to x_+} \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{|x_+ - y|}$$

$$\approx \lim_{x \to x_+} \log|x_+ - x| = \infty$$

dunque $t(x) \to \infty$ per $x \to x_+$

Ci vuole un tempo infinito per raggiungere un punto fisso

Fuga all'infinito



In questo caso $\dot{x}$ rimane finita o addirittura diverge

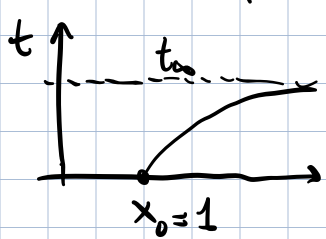
$$x(t) \to \infty$$

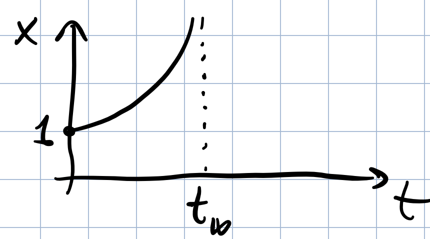
Esercizio: $m = 1$, $x_0 = -1$, $\dot{x}_0 = v$ e $V(x) = -\frac{1}{2}x^2$

Calcolare $x(t)$ e mostrare che tende al punto fisso in un tempo infinito per $v = 1$, altrimenti fugge all'infinito

Esercizio: $m = 1$, $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 0$ e $V(x) = -x^4$

Mostrare che ci vuole un tempo finito per arrivare all'infinito, ovvero





6. Moti con attrito

$$m\ddot{x} = f(x,\dot{x}) = -V'(x) + f_a(\dot{x}) \qquad \text{con} \quad \dot{x}\, f_a(\dot{x}) \leq 0$$

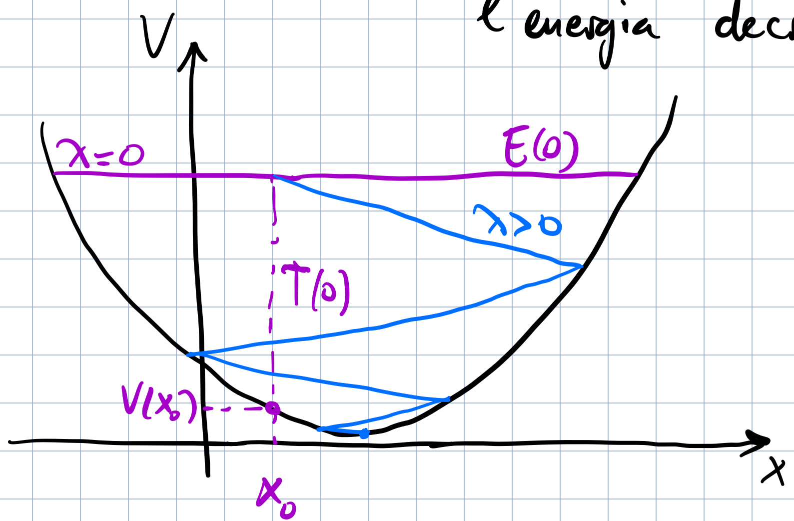
opposta alla velocità

Caso più semplice $f_a(\dot{x}) = -\lambda \dot{x}$ $\quad \lambda > 0$ attrito lineare

$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$ conservata (costante) per $\lambda = 0$

Ora $\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + V'(x)\,\dot{x} = \dot{x}\left[m\ddot{x} + V'(x)\right] = -\lambda \dot{x}^2 \leq 0$

l'energia decresce sempre, dissipazione



$\lambda = 0$ moto periodico con $E = E(0)$

$\lambda > 0$ il moto tende al punto fisso

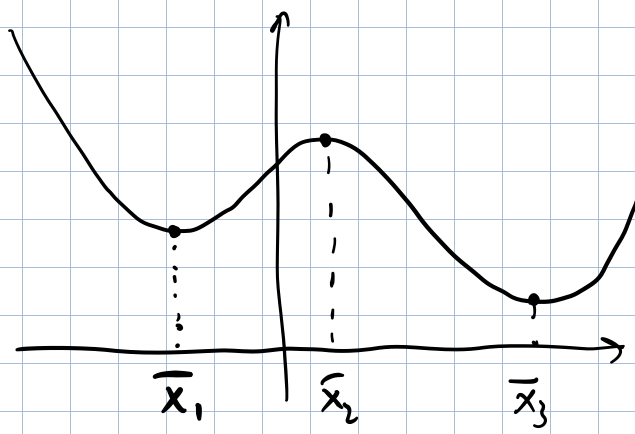
- se $\dot{x} \neq 0$ allora $E(t)$ decresce
- I punti con $\dot{x} = 0$ sono quelli dove $E(t) = V(x(t))$

  Ma in quei punti se $V'(x(t)) \neq 0$ allora $m\ddot{x} = -V'(x) \neq 0$ e il punto si muove
- Dunque per $t \to \infty$ raggiungiamo il punto fisso dove

  $V'(x) = 0$

Se ci sono più minimi vado in uno di essi che dipende dal dato iniziale

C. Stabilità dei punti fissi e piccole oscillazioni



Punto fisso, $V'(\bar{x}) = -f(\bar{x}) = 0$

se $x_0 = \bar{x}$ e $\dot{x}_0 = 0 \Rightarrow$ resto lì.

Ma se faccio una piccola perturbazione?

$$V(x) \approx V(\bar{x}) + \frac{1}{2} V''(\bar{x})(x-\bar{x})^2$$

$$m\ddot{x} = -V''(\bar{x})(x-\bar{x}) \qquad \begin{array}{l} \varepsilon = x - \bar{x} \\ K = V''(\bar{x}) \end{array} \qquad m\ddot{\varepsilon} = -K\varepsilon$$

se $K > 0$ <u>minimo</u> $\quad \varepsilon(t) = A\sin\left(\sqrt{K/m}\, t\right) + B\cos\left(\sqrt{K/m}\, t\right)$

Piccole oscillazioni intorno al minimo

se $K < 0$ <u>massimo</u> $\quad \varepsilon(t) = A\sinh\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t\right) + B\cosh\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t\right)$

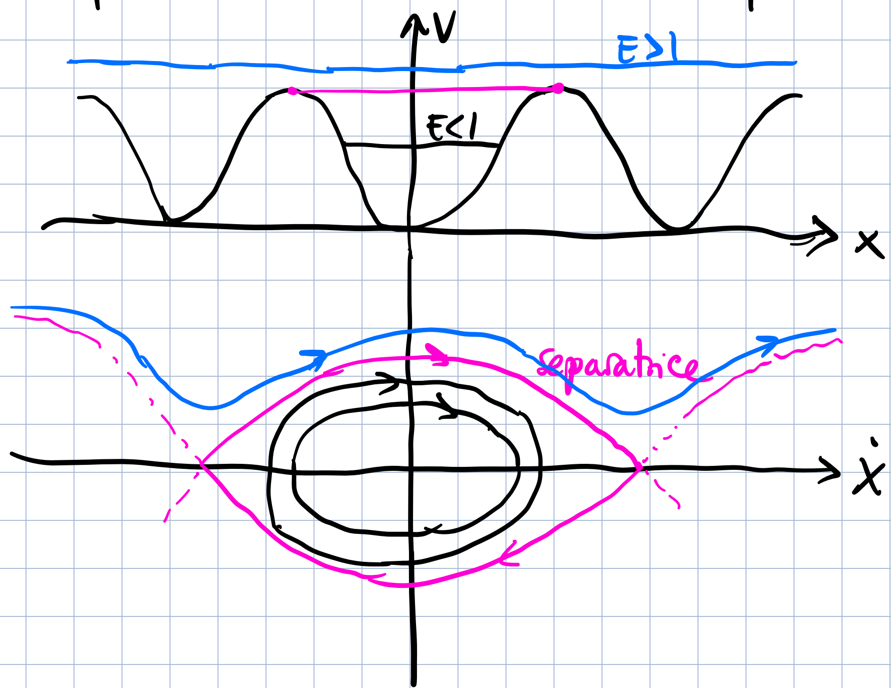
Genericamente il punto si allontana (cf. esercizio precedente)

NB In generale, la soluzione del problema completo e quella delle piccole oscillazioni rimangono vicine per un tempo lungo ma non infinito (cf. note Giuliani)

d. Ritratto di fase

Il ritratto di fase consiste nel disegnare le traiettorie nel piano $(x, \dot{x})$

Esempio: $V(x) = 1 - \cos x$ pendolo.



$$\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} = -\sin x$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$$

Moti periodici : linee chiuse

Moti all'infinito : linee aperte

Moti quasi periodici : regione densa (come vedremo)

e. Moti quasi periodici

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = f(t) \qquad f(t) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right), \ \forall t$$

oscillatore armonico forzato

$$f(t) = \sum_k \left[f_k \cos(k\omega t) + g_k \sin(k\omega t)\right]$$

Soluzione per $\omega_0 \neq k\omega$ (altrimenti c'è una risonanza):

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \sum_k \left[\frac{f_k \cos(k\omega t) + g_k \sin(k\omega t)}{m(\omega_0^2 - k^2\omega^2)}\right]$$

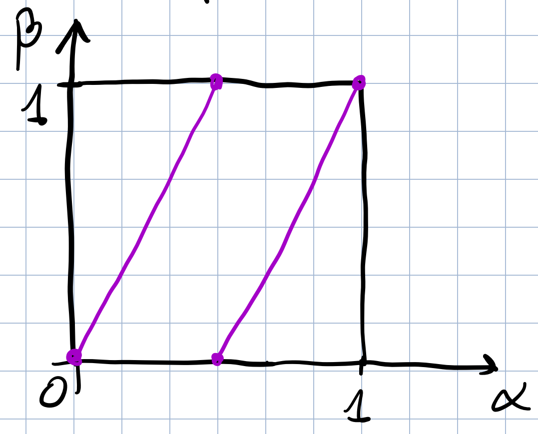
$$= F\left[\frac{\omega_0 t}{2\pi}\right] + G\left[\frac{\omega t}{2\pi}\right]$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} F'\left(\frac{\omega_0 t}{2\pi}\right) + \frac{\omega}{2\pi} G'\left(\frac{\omega t}{2\pi}\right)$$

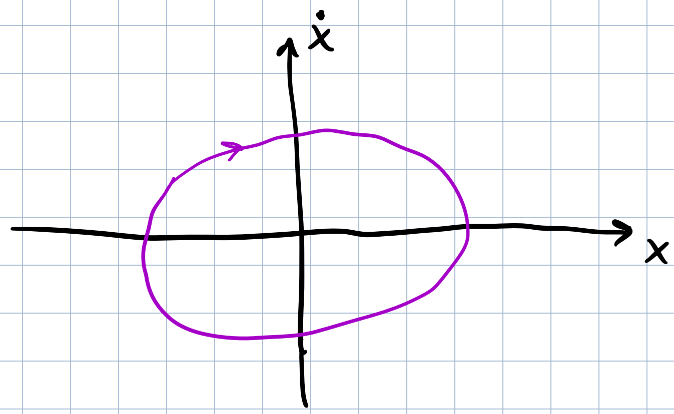
$$\begin{cases} F(\alpha) = F(\alpha+1) \\ G(\beta) = G(\beta+1) \end{cases} \qquad \alpha = \left[\frac{\omega_0 t}{2\pi}\right]_1 \qquad \beta = \left[\frac{\omega t}{2\pi}\right]_1$$

Il moto può essere descritto nello spazio (α, β) o $(x, \dot{x})$

esempio $\omega = 2\omega_0$



$\Rightarrow$



$$\begin{cases} \text{Se } \dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega} p = \dfrac{2\pi}{\omega_0} q & \text{moto periodico di periodo } T \\ \text{Viceversa se } \exists T : \begin{matrix} \omega T = 2\pi p \\ \omega_0 T = 2\pi q \end{matrix} \Rightarrow \dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{p}{q} \end{cases}$$

Cosa succede se $\frac{\omega}{\omega_0} \notin \mathbb{Q}$ irrationale ?

Thm. $r \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \{a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq b \Rightarrow [ar]_1 \neq [br]_1\}$

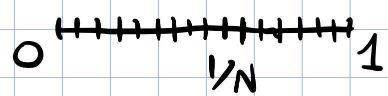
Dim. per assurdo

$$\begin{aligned} ar &= p + \delta \\ br &= q + \delta \end{aligned} \Rightarrow (a-b)r = p - q \Rightarrow r = \frac{p-q}{a-b} \in \mathbb{Q}$$

cvd

Thm. $r \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \{[kr]_1,\ k \in \mathbb{Z}\}$ è denso in $[0,1]$.

Dim. per assurdo



Supponiamo un intervallo $1/N$ senza punti

$\{0, r, 2r, 3r, \dots, Nr\}$ sono $N+1$ punti distinti in N intervalli, almeno due cadono nello stesso intervallo.

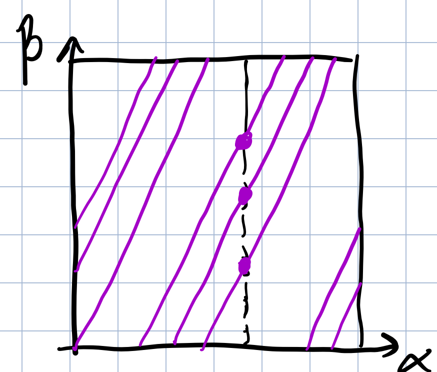
$$\exists a, b : \begin{aligned} ar &= p + \delta \\ br &= q + \delta' \end{aligned} \quad e \quad 0 < \delta - \delta' < \frac{1}{N}$$

Dunque
$$(a-b)r = p - q + \delta - \delta'$$
$$[(a-b)r]_1 = \delta - \delta' \in (0, 1/N)$$

Un multiplo intero di questo cade nell'intervallo che era supposto vuoto.

cvd

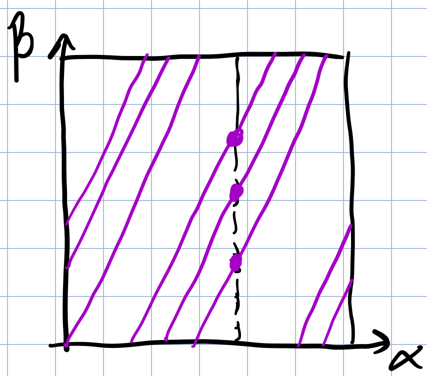
Allora:

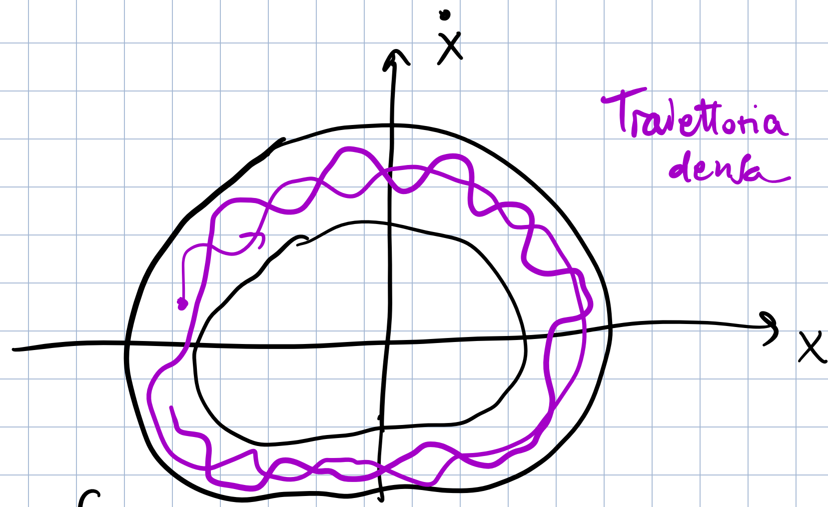


$$\begin{aligned} \alpha &= [\nu_0 t]_1 \\ \beta &= [\nu t]_1 \end{aligned} \Rightarrow t = \frac{1}{\nu_0} k + \frac{\alpha}{\nu_0}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$[\nu t]_1 = \left[\frac{\nu \alpha}{\nu_0} + \frac{\nu}{\nu_0} k\right]_1 \quad \text{è denso}$$

Dunque la traiettoria è densa in α, β





$$\begin{cases} x = F(\alpha) + G(\beta) \\ \dot{x} = \frac{\omega_0}{2\pi} F'(\alpha) + \frac{\omega}{2\pi} G'(\beta) \end{cases}$$

Un moto quasi periodico occupa una regione densa dello spazio $(x, \dot{x})$

Applicazione: costruzione di un moto periodico (orologio)

$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x$ oscillatore armonico senza attrito
periodo $2\pi/\omega_0$ ma irrealistico

$m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} - m\omega_0^2 x$ supponiamo λ piccolo
moto smorzato

$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + m\omega_0^2 x = f(t)$ oscillatore armonico forzato

se $f(t)$ periodica allora il moto è periodico
MA allora il problema sarebbe già risolto.

Orologio meccanico: scappamento

Vogliamo dare un impulso al pendolo ogni volta che passa per l'origine in modo da compensare la perdita di energia dovuta all'attrito.

L'impulso non è di per sé periodico ma dipende dal moto del pendolo.

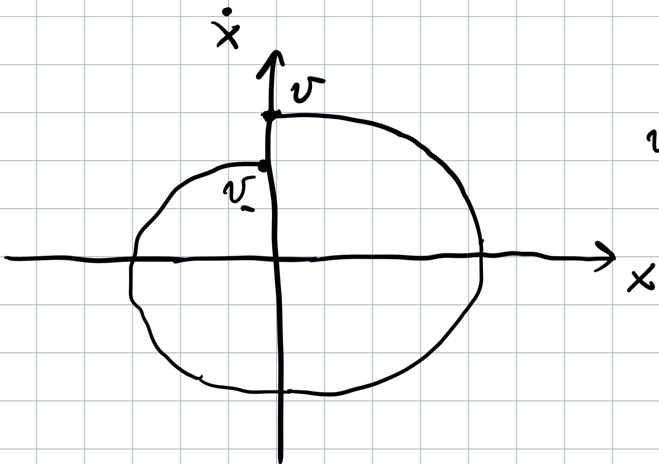
Esiste una soluzione periodica?

Modello minimale:

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + m\omega_0^2 x = 0 \quad \text{e} \quad v \to v+\delta \quad \text{a ogni passaggio in } x=0,\ v>0$$

Studiamo il moto con $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=v$

Soluzione $\quad x(t) = \dfrac{v}{\omega}\, e^{-\frac{\lambda}{2m}t} \sin(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{\lambda^2}{4m^2}}$

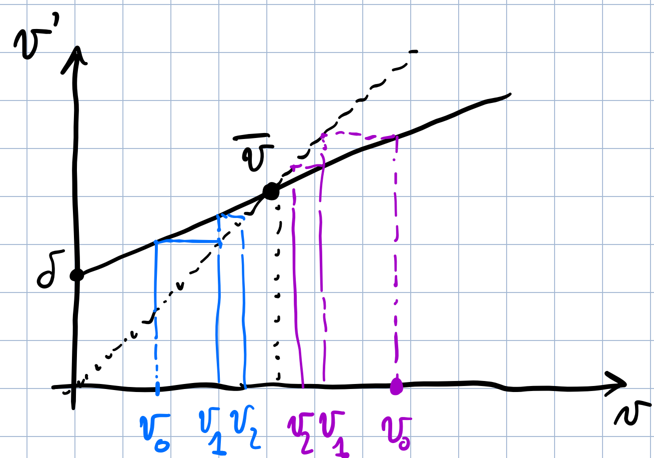


$$\underline{v} = \dot{x}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = v\, e^{-\frac{\lambda}{2m}\frac{2\pi}{\omega}} = v \cdot a$$

$$a < 1$$

Dopo un giro $\quad v' = a v + \delta$

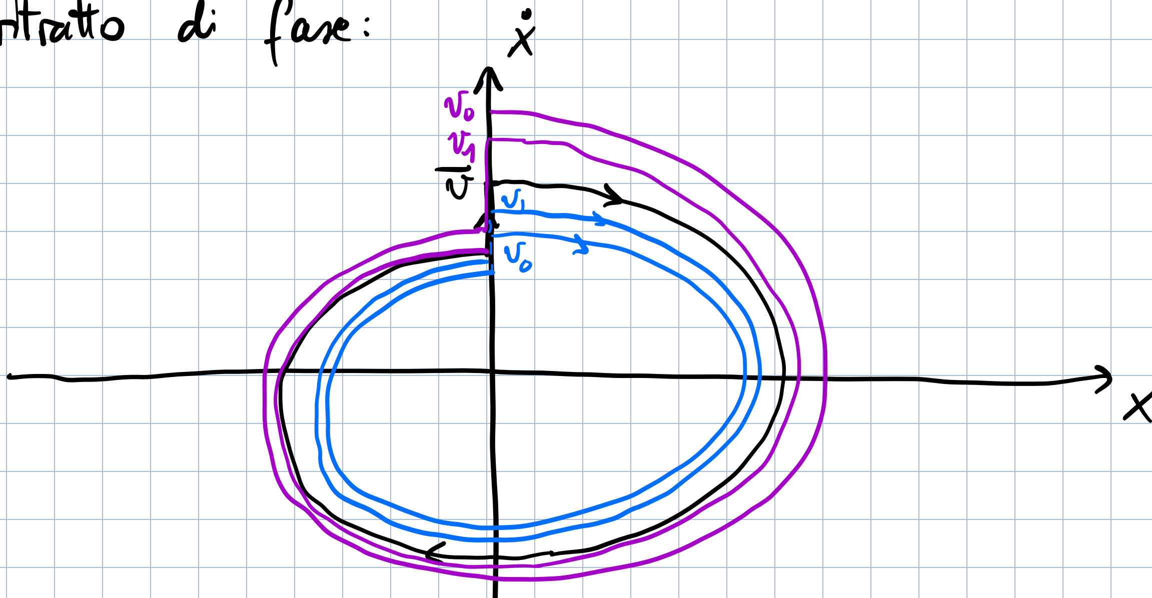
$$\bar{v} = \frac{\delta}{1-a} \quad \text{punto fisso}$$



Il punto fisso è stabile:

Se il moto viene iniziato con $v \neq \bar{v}$, tende a $\bar{v}$

Nel ritratto di fase:



Questo scenario vale anche per modelli più realistici.

Ingredienti essenziali:

- L'orbita imperturbata nel ritratto di fase spiraleggia verso l'origine. Naturale per attrito debole come visto in precedenza. Vale per esempio per un pendolo con attrito debole. $\Rightarrow v_- / v = a(v) < 1$
- Quando il pendolo passa nelle vicinanze dell'origine, riceve un colpo. Basta che in un tempo $\Delta t < T(v)$ ci sia una forza parallela alla velocità.

$$v' = f(v) = a(v) \cdot v + \delta(v)$$

Se $a(v) < 1$ e $\delta(v) > 0$, lo scenario resta qualitativamente valido. NB: il periodo dipende dai parametri.

(cf. note Giorgilli)