

2. Meccanica Newtoniana a più dimensioni

a. Equazioni del moto per un sistema di punti

Consideriamo un sistema di N punti materiali in 3 dimensioni

$$\underline{x}_i \in \mathbb{R}^3 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$\underline{x}(t) = \{ \underline{x}_1(t), \underline{x}_2(t), \dots, \underline{x}_N(t) \} \in \mathbb{R}^{3N} \quad \text{traiettoria}$$

Equazione di Newton:

$$m_i \ddot{\underline{x}}_i(t) = \underline{f}_i(t) = \underline{f}_i^{\text{ext}}(t) + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{j \rightarrow i}(t)$$

III principio:

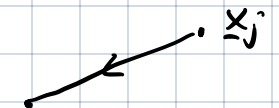
Forze esterne

Forze interne

$$\underline{f}_{j \rightarrow i}(t) = - \underline{f}_{i \rightarrow j}(t)$$

III principio in forma più forte:

$$\underline{f}_{j \rightarrow i} = \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|} f(|\underline{x}_i - \underline{x}_j|)$$



Questa forma implica la prima condizione

b. Equazioni del moto per il centro di massa

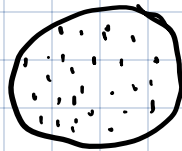
$$\underline{R}(t) = \frac{\sum_i m_i \underline{x}_i(t)}{\sum_i m_i}$$

$$M = \sum_i m_i$$

$$M \ddot{\underline{R}}(t) = \sum_i m_i \ddot{\underline{x}}_i(t) = \sum_i \underline{f}_i^{\text{ext}}(t) + \sum_i \sum_{j \neq i} \underline{f}_{i \rightarrow j}(t) = \underline{F}^{\text{ext}}(t)$$

||
0 per il terzo principio

Importante: il moto del centro di massa è retto dalla stessa equazione. **Giustificazione del modello di punto materiale.**



Corpo sferico fatto di tanti punti (atomi, etc.)

Se dimentichiamo i moti interni, si comporta come un punto.

Conservazione della quantità di moto totale:

$$\underline{P}(t) = \sum_i m_i \dot{\underline{x}}_i(t) \Rightarrow \dot{\underline{P}}(t) = \underline{F}^{\text{ext}}(t)$$

è conservata in assenza di forze esterne.

Momento angolare in un riferimento inerziale qualunque:

$$\begin{aligned}
 \underline{L} &= \sum_i \underline{x}_i \times m_i \dot{\underline{x}}_i & \underline{x}_i &= \underline{R} + \delta \underline{x}_i \\
 &= \sum_i m_i (\underline{R} + \delta \underline{x}_i) \times (\dot{\underline{R}} + \dot{\delta \underline{x}}_i) = \\
 &= \underline{R} \times M \dot{\underline{R}} + \sum_i m_i \delta \underline{x}_i \times \dot{\underline{R}} + \underline{R} \times \sum_i m_i \dot{\delta \underline{x}}_i + \sum_i m_i \delta \underline{x}_i \times \dot{\delta \underline{x}}_i \\
 &= \underline{R} \times M \dot{\underline{R}} + \sum_i \delta \underline{x}_i \times m_i \dot{\delta \underline{x}}_i \\
 &= \underline{L}_{cm} + \underline{L}_R \quad (\text{teorema di König})
 \end{aligned}$$

$$\dot{\underline{L}}_{cm} = \dot{\underline{R}} \times M \dot{\underline{R}} + \underline{R} \times M \ddot{\underline{R}} = \underline{R} \times \underline{F}^{ext} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Il centro di massa} \\ \text{si comporta} \\ \text{come un punto} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{L}}_R &= \sum_i \delta \underline{x}_i \times m_i \dot{\delta \underline{x}}_i + \sum_i \delta \underline{x}_i \times m_i (\ddot{\underline{x}}_i - \ddot{\underline{R}}) \\
 &= \sum_i (\underline{x}_i - \underline{R}) \times m_i \ddot{\underline{x}}_i - \sum_i m_i \delta \underline{x}_i \times \ddot{\underline{R}} \\
 &= \sum_i (\underline{x}_i - \underline{R}) \times \underline{f}_i^{ext} + \sum_i (\underline{x}_i - \underline{R}) \times \sum_{j \neq i} \underline{f}_{j \rightarrow i} \\
 &\quad \underline{\tau}^{ext} \quad \quad \quad \underline{\tau}^{int} \quad \quad \quad \text{momento delle forze}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\tau}^{int} &= \sum_{i < j} \left[(\underline{x}_i - \underline{R}) \times \underline{f}_{j \rightarrow i} + (\underline{x}_j - \underline{R}) \times \underline{f}_{i \rightarrow j} \right] \\
 &= \sum_{i < j} (\underline{x}_i - \underline{x}_j) \times \underline{f}_{j \rightarrow i} = 0 \quad \text{se vale il III} \\
 &\quad \quad \quad \text{principio in forma forte} \\
 &\quad \quad \quad \text{perché } \underline{f}_{j \rightarrow i} \parallel (\underline{x}_i - \underline{x}_j)
 \end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\underline{\dot{P}} = M \underline{\ddot{R}} = \underline{F}^{\text{ext}} = \sum_i \underline{f}_i^{\text{ext}}$$

$$\underline{L} = \underline{L}_{\text{CM}} + \underline{L}_R$$

$$\underline{\dot{L}}_{\text{CM}} = \underline{R} \times \underline{F}^{\text{ext}} \quad (\text{segue dalla precedente})$$

$$\underline{\dot{L}}_R = \underline{\tau}^{\text{ext}} = \sum_i (\underline{x}_i - \underline{R}) \times \underline{f}_i^{\text{ext}}$$

Abbiamo 6 equazioni in 6 incognite, 3 coordinate del centro di massa e 3 angoli di rotazione, dette equazioni di Eulero.

In assenza di forze esterne, \underline{P} ed \underline{L}_R sono conservati.

C. Forze conservative

Nel caso unidimensionale $f(x) = - \frac{dV}{dx}$

Ora supponiamo

$$f_{i\alpha}^{\text{ext}} = - \frac{\partial V^{\text{ext}}}{\partial x_{i\alpha}} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ \alpha = x, y, z \end{array}$$

che scriviamo come

$$\underline{f}_i^{\text{ext}} = - \nabla_{\underline{x}_i} V^{\text{ext}}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N)$$

Per le forze interne:

$$\underline{f}_{j \rightarrow i} = \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|} f(|\underline{x}_i - \underline{x}_j|) \quad f(r) = - \frac{dV(r)}{dr}$$

Allora

$$E = T + V = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{x}}_i^2 + V^{\text{ext}}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N) + \sum_{i < j} v(|\underline{x}_i - \underline{x}_j|)$$

e' costante.

Verificare per esercizio nel caso $N=2$ e $N=3$

d. Piccole oscillazioni

Sistema di punti in presenza di forze esterne

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + \underbrace{V_{\text{ext}}(x_1, \dots, x_N) + \sum_{i < j} v(|x_i - x_j|)}_{V(x)}$$



Cerchiamo un punto di equilibrio stabile.

$$F_{ix} = - \frac{\partial V}{\partial x_{ix}} = - \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial x_{ix}} - \sum_{j \neq i} v'(|x_i - x_j|) \frac{x_{ix} - x_{jx}}{|x_i - x_j|} = 0$$

La forza totale su ogni particella è nulla.

Per semplificare le notazioni indichiamo l'insieme delle coordinate con un solo indice $a = 1, \dots, 3N$:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{3N}\} = \{x_a\} \quad \text{e} \quad F_a = - \frac{\partial V}{\partial x_a} = 0$$

Teorema di Lagrange - Dirichlet

Condizione sufficiente per la stabilità di un punto di equilibrio \bar{x} è che la matrice Hessiana

$$H_{ab} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_a \partial x_b}(\bar{x})$$

$a, b = 1, \dots, 3N$
matrice $3N \times 3N$

abbia tutti gli autovalori strettamente positivi.

Dimostrazione (per semplicità $V \in C^\infty$ e $m_i = m$)

Nelle vicinanze di \bar{x} usiamo lo sviluppo di Taylor

Definiamo $\delta x_a = x_a - \bar{x}_a$ e abbiamo

$$V(x) = V(\bar{x}) + \frac{1}{2} \sum_{a,b} \delta x_a H_{ab} \delta x_b + R(\delta x, \bar{x})$$

dove $|R(\delta x, \bar{x})| \leq K |\delta x|^3$

Fissiamo $V(\bar{x}) = 0$ come energia di riferimento.

Consideriamo un moto che inizia vicino a \bar{x} , ovvero

$$|\dot{\delta x}_a(0)|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{3M} \quad \text{e} \quad |\delta x_a(0)|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{\sum_{ab} |H_{ab}|} \quad \text{per } \varepsilon \text{ fissato.}$$

L'energia è fissata dal dato iniziale e dunque verifica

$$E = \sum_a \frac{1}{2} m \dot{\delta x}_a(0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{a,b} \delta x_a(0) H_{ab} \delta x_b(0) + R_0$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{3Nm}{3M} \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \frac{\sum_{ab} |H_{ab}|}{\sum_{ab} |H_{ab}|} \varepsilon^2 + \tilde{K} \varepsilon^3$$

$$= \varepsilon^2 + \tilde{K} \varepsilon^3$$

↑
Ogni componente $|\delta x_a|$
è minore di $\varepsilon \times \text{cost.}$

A qualunque tempo t successivo, l'energia cinetica è positiva e dunque $V(x) \leq E$

Usando lo sviluppo di Taylor abbiamo

$$\frac{1}{2} \sum_{ab} \delta x_a(t) H_{ab} \delta x_b(t) + R(\delta x(t), \bar{x}) \leq E \leq \varepsilon^2 + \tilde{K} \varepsilon^3$$

Ricordiamo che per una matrice diagonalizzabile

$$\psi^T H \psi \geq \lambda_{\min} |\psi|^2 \quad \text{dove } \lambda_{\min} \text{ è l'autovalore minimo}$$

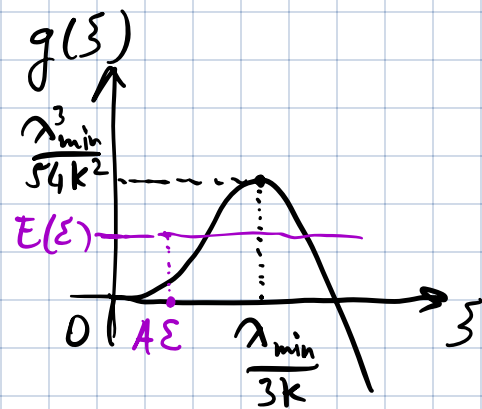
Allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda_{\min} |\delta x(t)|^2 &\leq \frac{1}{2} \sum_{ab} \delta x_a(t) H_{ab} \delta x_b(t) \leq \varepsilon^2 + \tilde{K} \varepsilon^3 - R(\delta x(t), \bar{x}) \\ &\leq \varepsilon^2 + \tilde{K} \varepsilon^3 + K |\delta x(t)|^3 \end{aligned}$$

↑
autovalore
minimo di H

$$\xi(t) = |\delta x(t)| \quad \text{e} \quad \xi(0) \leq A \varepsilon$$

$$g(\xi) = \frac{1}{2} \lambda_{\min} \xi^2(t) - K \xi^3(t) \leq \varepsilon^2 + \tilde{K} \varepsilon^3$$



Se scegliamo ε sufficientemente piccolo, abbiamo

$$|\delta x(t)|^2 = \xi(t)^2 \leq \frac{2}{\lambda_{\min}} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3)$$

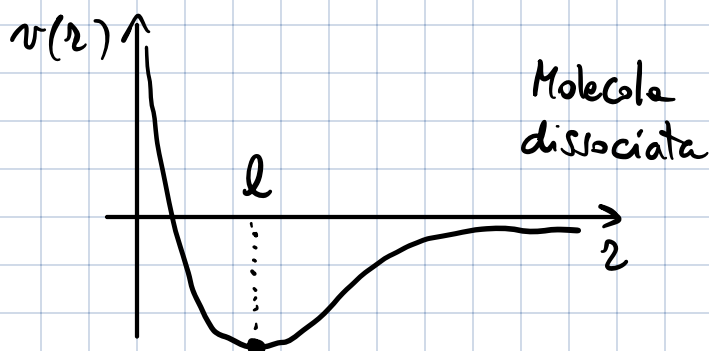
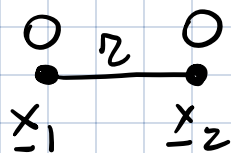
dunque il moto rimane sempre vicino al minimo.

Applicazione: vibrazioni molecolari

I modi di vibrazione molecolari sono molto importanti perché possono essere misurati facilmente con metodi spettroscopici e permettono di identificare le molecole presenti in un gas.

Una trattazione completa e corretta richiede la meccanica quantistica. Qui discuteremo una trattazione classica e approssimata.

Ossigeno



Potenziale di Morse

$$v(r) = D \left\{ \left(1 - e^{-B(r-l)} \right)^2 - 1 \right\} = D \left\{ e^{-2B(r-l)} - 2e^{-B(r-l)} \right\}$$

$$v'(r) = D \left\{ -2B e^{-2B(r-l)} + 2B e^{-B(r-l)} \right\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r=l$$

$$v''(r) = D \left\{ (2B)^2 e^{-2B(r-l)} - 2B^2 e^{-B(r-l)} \right\}$$

$$v''(l) = 2DB^2 = k$$

Ossigeno: $m = 16 \text{ u} = 2.65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$

$$l = 1.21 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$B = 2.65 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

$$D = 8.35 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

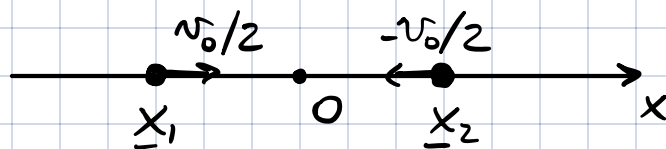
$$K = 1.17 \cdot 10^3 \text{ J/m}^2$$

Equazioni del moto:
$$\begin{cases} m \ddot{\underline{x}}_1 = - \frac{\partial V}{\partial \underline{r}} \hat{\underline{r}} \\ m \ddot{\underline{x}}_2 = + \frac{\partial V}{\partial \underline{r}} \hat{\underline{r}} \end{cases} \quad \underline{r} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2$$

$\underline{R} = \frac{1}{2}(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$ e' il centro di massa $\Rightarrow \ddot{\underline{R}} = 0$

Supponiamo $\underline{R}(0) = \underline{0}$, $\dot{\underline{R}}(0) = \underline{0} \Rightarrow$ il centro di massa e' fisso in $\underline{0}$.

$$\frac{m}{2} \ddot{\underline{r}} = - \frac{\partial V}{\partial \underline{r}} \hat{\underline{r}}$$



Consideriamo un dato iniziale particolare:

$$\underline{x}_1(0) = \begin{pmatrix} r_0/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{x}_2(0) = \begin{pmatrix} -r_0/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{r}(0) = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\underline{x}}_1(0) = \begin{pmatrix} v_0/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\underline{x}}_2(0) = \begin{pmatrix} -v_0/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{r}}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dato che $\underline{r}(0) \parallel \hat{\underline{x}}$, $\dot{\underline{r}}(0) \parallel \hat{\underline{x}}$, $\ddot{\underline{r}}(0) \parallel \hat{\underline{r}}(0) \parallel \hat{\underline{x}}$,
tutto il moto si svolge lungo l'asse x.

Otteniamo
$$\frac{m}{2} \ddot{r} = -v'(r) \approx -v''(l)(r-l)$$

La frequenza principale di vibrazione è

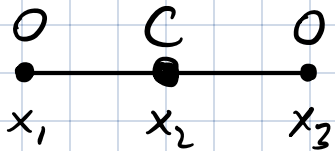
$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{4DB^2}{m}} = 2.97 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

In spettroscopia si tende a riportare

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{c} \sim 10^6 \text{ m}^{-1} \sim 10^4 \text{ cm}^{-1}$$

↑ velocità della luce $\sim 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Anidride Carbonica



- Consideriamo di nuovo un dato iniziale tale che il moto si svolge lungo l'asse x .
- Trascuriamo l'interazione fra i due ossigeni che sono più lontani.
- Usiamo un potenziale di Morse C-O.
- Consideriamo $x_1 < x_2 < x_3$

L'energia è

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 + \underbrace{v(x_2 - x_1) + v(x_3 - x_2)}_{V(x_1, x_2, x_3)}$$

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = +v'(x_2 - x_1) \\ M \ddot{x}_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2} = -v'(x_2 - x_1) + v'(x_3 - x_2) \\ m \ddot{x}_3 = -\frac{\partial V}{\partial x_3} = -v'(x_3 - x_2) \end{cases}$$

La condizione di equilibrio è $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = l$ in cui tutte le forze sono nulle.

Scegliamo $x_2 = 0$, $x_1 = -l$, $x_3 = l$. Una traslazione conserva l'equilibrio. Definiamo gli spostamenti dall'equilibrio:

$$x_1 = -l + \varepsilon_1 \quad x_2 = \varepsilon_2 \quad x_3 = l + \varepsilon_3$$

Linearizziamo con $K = v''(l)$:

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 = K (x_2 - x_1 - l) \\ M \ddot{x}_2 = -K (x_2 - x_1 - l) + K (x_3 - x_2 - l) \\ m \ddot{x}_3 = -K (x_3 - x_2 - l) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} m \ddot{\varepsilon}_1 = K (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \\ M \ddot{\varepsilon}_2 = -K (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + K (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \\ m \ddot{\varepsilon}_3 = -K (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \end{cases}$$

ovvero

$$M \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = -H \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K \end{pmatrix}$$

Vedremo più avanti come trattare questa equazione
matriciale

Per adesso invertiamo la matrice M e scriviamo

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = -M^{-1} H \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = -\tilde{H} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H} = M^{-1} H = \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{M} & \frac{2k}{M} & -\frac{k}{M} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \quad \ddot{\underline{\varepsilon}} = -\tilde{H} \underline{\varepsilon}$$

Attenzione: la matrice \tilde{H} non è simmetrica
(M ed H sono simmetriche ma non commutano)

Tuttavia se \underline{v} è un autovettore (destra) di \tilde{H}
ovvero $\tilde{H} \underline{v} = \lambda \underline{v}$ allora possiamo cercare una
soluzione della forma $\underline{\varepsilon}(t) = a(t) \underline{v}$ e

$$\ddot{\underline{\varepsilon}}(t) = \ddot{a}(t) \underline{v} = -\tilde{H} a(t) \underline{v} = -a(t) \lambda \underline{v}$$

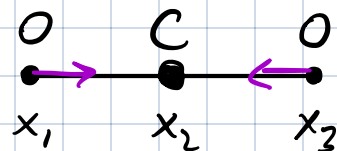
ovvero

$$\ddot{a}(t) = -\lambda a(t)$$

è un oscillatore armonico di frequenza $\omega = \sqrt{\lambda}$

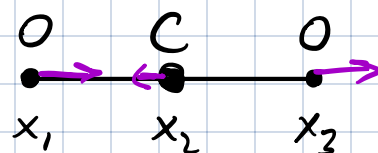
Gli autovalori ed autovettori (destri) di \tilde{H} sono:

- $\lambda_1 = \frac{K}{m}$ e $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



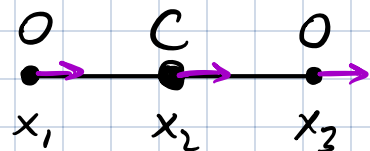
Vuol dire che C non si muove e i due O oscillano in controfase, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_3$

- $\lambda_2 = \frac{K}{m} \left(1 + \frac{2m}{M} \right)$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}$



Vuol dire che C oscilla in controfase e con ampiezza minore dei due O

- $\lambda_3 = 0$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Vuol dire che $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$: traslazione rigide delle molecole, non cambia l'energia, dunque $\lambda_3 = 0$

Abbiamo due frequenze principali di vibrazione

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$M = 12u \quad m = 16u$$

$$\omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{K}{m} \left(1 + \frac{2m}{M} \right)}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + \frac{2m}{M}} = 1.915$$