3. Meccanica Lagrangiana

Obiettivo: formulare la meccanica di Newton in modo da permettere facilmente i cambiamenti di coordinate, per esempio per trattare moti vincolati.

Esercizio (noioso) Oscillatore armonico in due dimensioni

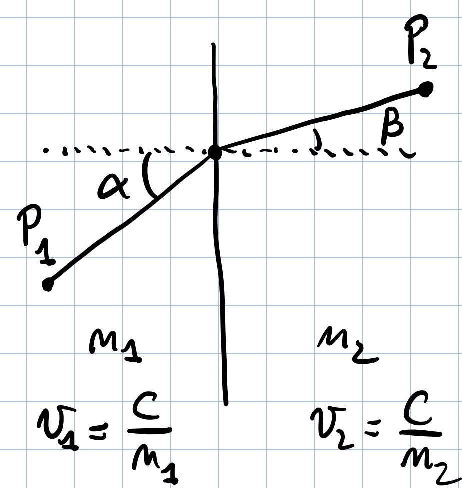
$$V(x,y) = k\,\frac{x^2+y^2}{2} \qquad m\ddot{x} = -kx$$
$$m\ddot{y} = -ky$$

Provare a scrivere le equazioni in coordinate polari. Verificare che è noioso.

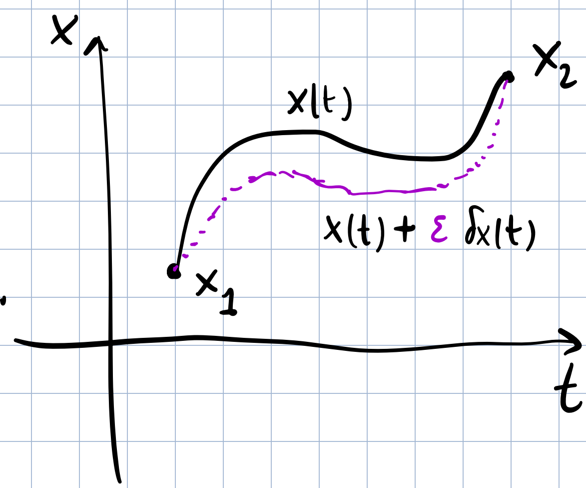
Obiettivo: formulare un principio di minimo in analogia con l'ottica geometrica.

Esercizio (principio di Fermat)

Mostrare che il cammino più rapido per andare da P_1 a P_2 è quello in figura con $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{m_1}{m_2}$



a. Principio di "minima" azione



Consideriamo tutti i moti possibili che vanno da (x_1, t_1) a (x_2, t_2). A ogni moto associamo un numero che chiamiamo "azione":

$$A[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,(T - V) = \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - V(x(t))\right]$$

Cerchiamo il moto che minimizza l'azione

$$a(\varepsilon) = A[x(t) + \varepsilon\,\delta x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{1}{2} m(\dot{x} + \varepsilon\,\delta\dot{x})^2 - V(x + \varepsilon\,\delta x)\right]$$

$$\simeq A[x(t)] + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt\left[m\,\dot{x}(t)\,\delta\dot{x}(t) - V'(x(t))\,\delta x(t)\right]$$

Integriamo per parti usando $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$

$$\simeq \underbrace{A[x(t)]}_{=\, a(\varepsilon = 0)} - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt\left[m\,\ddot{x}(t) + V'(x(t))\right]\cdot \delta x(t)$$

$$\left.\frac{da}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{a(\varepsilon) - a(0)}{\varepsilon} = -\int_{t_1}^{t_2} dt\left[m\,\ddot{x}(t) + V'(x(t))\right]\cdot \delta x(t)$$

Dunque

$$m\ddot{x} = -V'(x) \iff \left.\frac{da}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{dA[x(t)+\varepsilon\,\delta x(t)]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$\forall\, \delta x(t)$ tale che $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$

- DIM $\Rightarrow$

Se $m\ddot{x} = -V'(x)$ allora

$$\left.\frac{da}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -\int_{t_1}^{t_2} dt\,[m\ddot{x} + V'(x)]\,\delta x(t) = -\int_{t_1}^{t_2} dt\; 0 = 0$$

- DIM $\Leftarrow$ $\qquad f(t) = m\ddot{x}(t) + V'(x(t))$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\; f(t)\,\delta x(t) = 0 \qquad \forall\, \delta x(t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = 0$$

Per assurdo: se $f(t) \neq 0 \Rightarrow \delta x(t) = f(t)$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt\; f(t)\,\delta x(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\; f^2(t) \neq 0$$ contro l'ipotesi

(Più tardi daremo una dimostrazione alternativa)

Generalizziamo : $\mathcal{L}(\dot{x}, x) = T(\dot{x}) - V(x)$

$$A[x+\varepsilon\delta x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}\left[\dot{x}(t) + \varepsilon\,\delta\dot{x}(t)\,,\ x(t) + \varepsilon\,\delta x(t)\right]$$

$$\approx A[x] + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\,\varepsilon\,\delta\dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\,\varepsilon\,\delta x$$

$$= A[x] - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right]\delta x$$

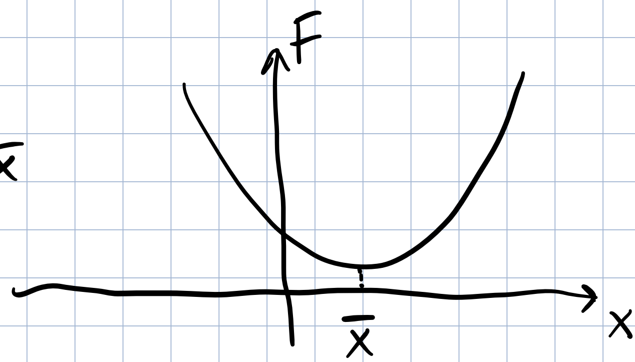
Dunque $$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}}$$ Equazione di Eulero-Lagrange

Verifichiamo il caso noto : $\mathcal{L}(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -V'(x)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -V'(x)$$

6. Cambiamenti di coordinate



$F(x)$ $\qquad F'(x) = 0 \iff x = \bar{x}$

$$G(q) = F(x(q))$$

$$G'(q) = F'(x(q)) \cdot x'(q) = 0$$

$$\Updownarrow$$

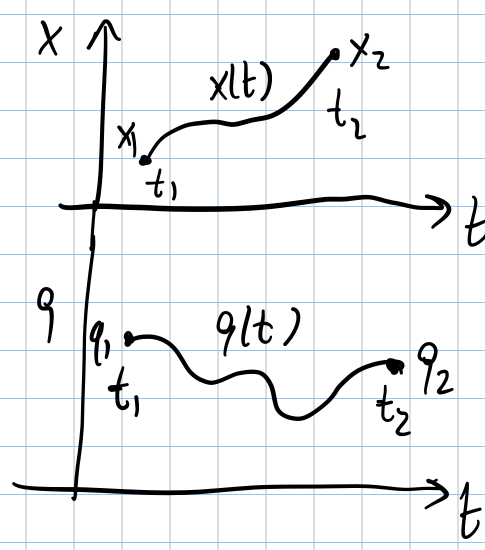
$$x(q) = \bar{x} \iff \bar{q} = q(\bar{x})$$

Se il cambiamento di variabile non è degenere allora $x'(q) \neq 0$

Il minimo di $G(q)$ è l'immagine di quello di $F(x)$ nello spazio q.

Con le traiettorie è la stessa cosa.

Facciamo un cambio di variabile $x(t) = x(q(t))$



Il moto che rende stazionaria $A[q(t)]$ è l'immagine di quello che rende stazionaria $A[x(t)]$

dunque $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$

Verifichiamolo più esplicitamente

Coordinata $q(x)$, $\dot q = q'(x)\,\dot x$ con $q'(x) \neq 0$.

$\dot x = x'(q)\,\dot q$

$$\mathcal{L}_q(\dot q, q) = \mathcal{L}_x(x'(q)\dot q,\ x(q))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial \dot q} = \frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial \dot x}\, x'(q) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial \dot x}\, x''(q)\,\dot q + \frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial x}\, x'(q)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial \dot q} = \frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial \dot x}\, x''(q)\,\dot q + x'(q)\,\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial \dot x}$$

dunque

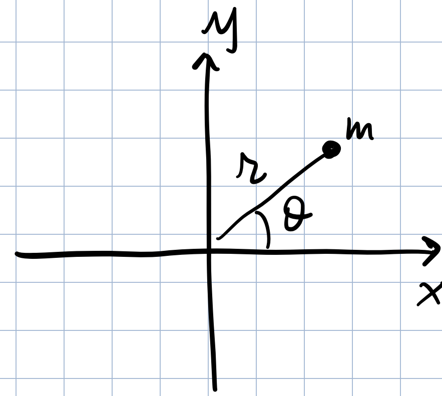
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial \dot q} - \frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial q} &= \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial \dot x}\, x''(q)}\,\dot q + x'(q)\,\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial \dot x} \\ &\quad - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial \dot x}\, x''(q)}\,\dot q - \frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial x}\, x'(q) \\ &= x'(q)\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right]\end{aligned}$$

dunque le due equazioni sono equivalenti.

L'interesse di una formulazione variazionale è che non dipende dal sistema di coordinate.

Esempio: Oscillatore armonico in due dimensioni

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$$



$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}kr^2$$

e dunque

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\ddot{r} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - kr$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

dunque $mr^2\dot{\theta} = \text{Const}$

NB $$L = m\,\underline{x}\times\underline{\dot{x}} = m\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\theta} \end{pmatrix}$$ dunque $L_z = mr^2\dot{\theta}$ e' conservato.

Siccome $\mathcal{L}$ non dipende da θ, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}$ e' conservato!

Si noti la semplicita' del cambio di variabile.

C. Grandezze conservate

L'esempio precedente si generalizza in maniera ovvia:

$$\mathcal{L}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_N, q_1, q_2, q_3, \dots, q_N)$$

Se $\mathcal{L}$ non dipende da q_i allora $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$

ovvero $P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ è una grandezza conservata.

q_i è detto coordinata ciclica e per ogni coordinata ciclica c'è una grandezza conservata

Più in generale, una grandezza $F(\dot{q}, q)$ è conservata se

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} = 0$$

ovvero F è costante lungo il moto.

Nota:

$$H = \dot{q}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L}$$ è conservata.

Esercizio: dimostrare che è conservata e che se $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ allora $H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ è l'energia.

Teorema di Noether

Consideriamo una trasformazione di coordinate

$$q \longrightarrow Q(s) \quad \text{con} \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad Q(0) = q$$

e la Lagrangiana associata,

$$\mathcal{L}_s\left[\dot{Q}(s), Q(s)\right]$$

Se $\displaystyle \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}_s\left[\dot{Q}(s), Q(s)\right] = 0$ allora esiste una quantità conservata.

Dimostrazione

Abbiamo $\displaystyle \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}_s = \frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$

Calcoliamo questa derivata in $s = 0$.

Siccome $Q(0) = q$, abbiamo

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial s}\bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial Q}{\partial s}\bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial Q}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right]$$

dunque $\displaystyle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial Q}{\partial s}\bigg|_{s=0}$ è conservata

Esempio Invarianza per traslazioni

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{x}}_i^2 - \sum_{i<j} V(|\underline{x}_i - \underline{x}_j|)$$

Cambio di variabile $\underline{x}_i \longrightarrow \underline{x}_i + s\,\underline{n}$ con $\underline{n} \in \mathbb{R}^3$

$\dot{\underline{x}}_i \longrightarrow \dot{\underline{x}}_i$

Dato che $\mathcal{L}$ non dipende da s abbiamo una quantità conservata: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{x}}_i} = m_i \dot{\underline{x}}_i$ $\qquad \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial s} = \underline{n}$

La quantità conservata è

$$\sum_i m_i \dot{\underline{x}}_i \cdot \underline{n} = \underline{P} \cdot \underline{n}$$

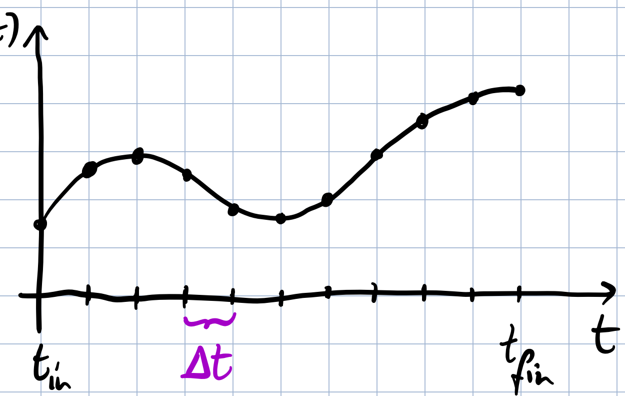
Siccome $\underline{n}$ è arbitrario, $\underline{P}$ è conservato

Esempio Invarianza per rotazioni e conservazione del momento angolare (cf. note Tong)

d. Discretizzazione del moto e algoritmo di Verlet

Discretizziamo la traiettoria e scriviamo l'azione:

$$A[x(t)] = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 - V(x(t)) \right]$$



$$A(x_1, x_2, \dots, x_M) = \Delta t \sum_i \frac{1}{2} m \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{\Delta t^2} - \Delta t \sum_i V(x_i)$$

NB Non ci preoccupiamo troppo dei bordi

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = -\frac{m}{\Delta t}(x_{i+1} - x_i) + \frac{m}{\Delta t}(x_i - x_{i-1}) - \Delta t \, V'(x_i) = 0$$

dunque

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{\Delta t^2}{m} V'(x_i)$$

- Osserviamo che per $\Delta t \to 0$, $\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} \longrightarrow \ddot{x}(t)$

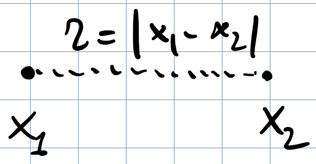
  e ritroviamo $m\ddot{x} = -V'(x)$.

- Si può mostrare che questa discretizzazione mantiene la reversibilità del moto e conserva il volume (cf. più avanti)

- Soprattutto, questa procedura garantisce che il moto discreto è vicino a un moto continuo con le stesse condizioni $x(t_{in})$ e $x(t_{fin})$

Applicazione: Moti centrali e il problema dei due corpi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\underline{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\underline{x}}_2^2 - V(|x_1 - x_2|)$$



Cambio di coordinate:

$$\underline{r} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2 \qquad M = m_1 + m_2$$

$$\underline{R} = \frac{m_1 \underline{x}_1 + m_2 \underline{x}_2}{M} \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{\underline{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\underline{r}}^2 - V(|\underline{r}|)$$

↑ Il centro di massa e' separato, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{R}}} = M \dot{\underline{R}} = \text{costante}$

Otteniamo una particella in un potenziale sferico:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{\underline{r}}^2 - V(|\underline{r}|)$$

Il momento angolare nel riferimento del centro di massa e'

$$\underline{L}_R = (\underline{x}_1 - \underline{R}) \times m_1 (\dot{\underline{x}}_1 - \dot{\underline{R}}) + (\underline{x}_2 - \underline{R}) \times m_2 (\dot{\underline{x}}_2 - \dot{\underline{R}}) =$$

Usiamo $m_1(\dot{\underline{x}}_1 - \dot{\underline{R}}) = -m_2(\dot{\underline{x}}_2 - \dot{\underline{R}}) = m_1 \dot{\underline{x}}_1 - \frac{m_1^2}{M} \dot{\underline{x}}_1 - \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\underline{x}}_2 = \mu(\dot{\underline{x}}_1 - \dot{\underline{x}}_2)$

$$= (\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \times \mu (\dot{\underline{x}}_1 - \dot{\underline{x}}_2) = \underline{r} \times \mu \dot{\underline{r}}$$

ed e' conservato.

Fissiamo un riferimento con $\underline{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}$, il moto si svolge nel piano (x, y) dunque $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

Come in precedenza usiamo $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Otteniamo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

θ e' ciclico e $L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta}$ e' conservato

(lo sapevamo già)

L'equazione per r e'

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \mu \ddot{r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

Sostituiamo $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$ nell'equazione del moto

Attenzione: non in $\mathcal{L}$

$$\mu \ddot{r} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial V^L_{eff}(r)}{\partial r}$$

$$V^L_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

Otteniamo un moto unidimensionale in un potenziale efficace che dipende dal momento angolare L.

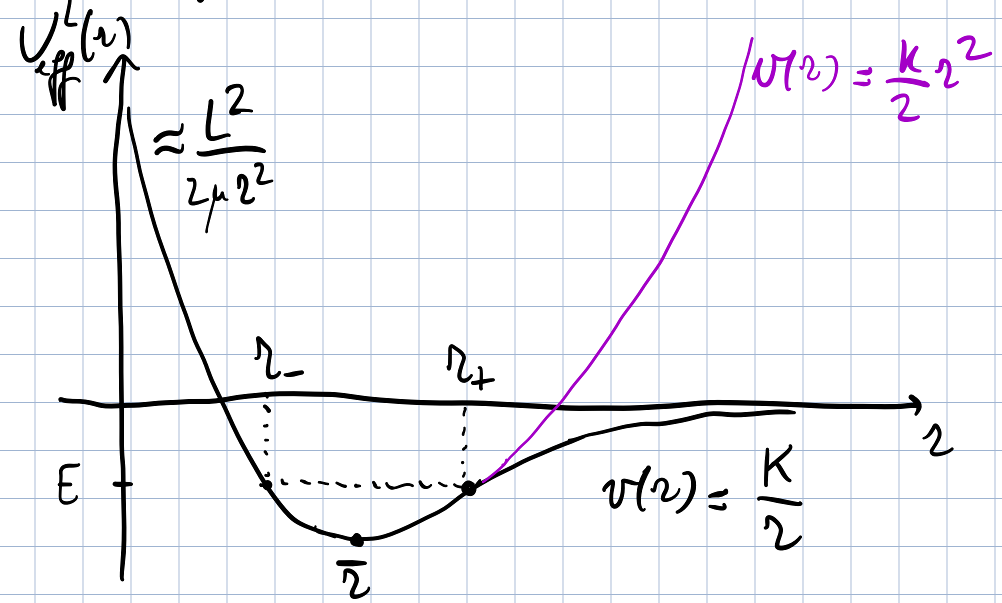
Nota: l'energia totale è, usando

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{\underline{r}} = \begin{pmatrix} \dot r\cos\theta - r\sin\theta\,\dot\theta \\ \dot r\sin\theta + r\cos\theta\,\dot\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\,\dot{\underline{r}}^2 + V(|\underline{r}|) = \frac{1}{2}\mu\left[\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right] + V(r) =$$

$$= \frac{1}{2}\mu\dot r^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\frac{L^2}{\mu^2 r^4} + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot r^2 + V^L_{eff}(r)$$

quindi l'energia effettiva del sistema 1d coincide con l'energia totale.

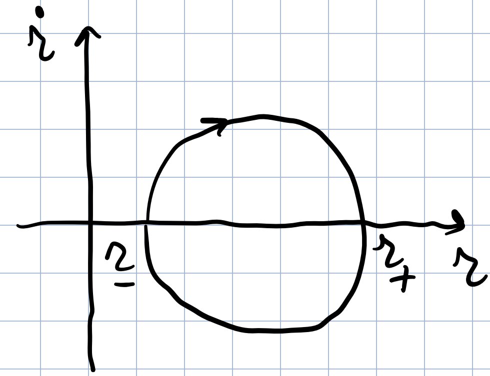


Fissati L ed E, se il moto è confinato ottengo un periodo

$$T(E,L) = 2\int_{r_-}^{r_+} dr\,\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V^L_{eff}(r)\right)}}$$

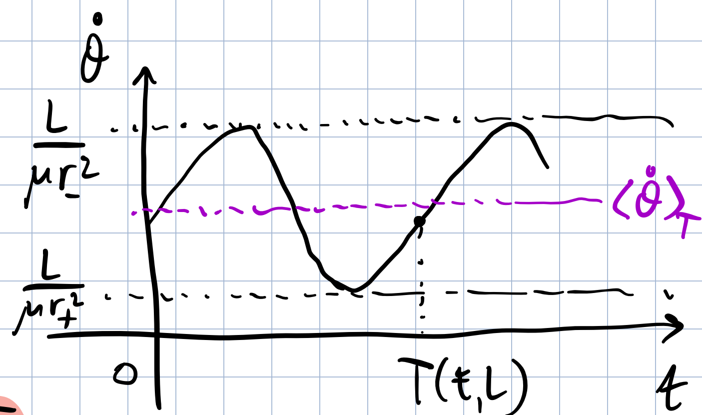
Il moto è periodico?

Orbita periodica in $(r,\dot r)$



Ma in $(\theta,\dot\theta)$? $\dot\theta(t) = \frac{L}{\mu r^2(t)}$

$\dot\theta(t)$ è una funzione periodica di periodo $T(E,L)$



Definiamo

$$\omega_\theta(E,L) = \langle\dot\theta\rangle_T = \frac{1}{T(E,L)}\int_0^{T(E,L)} dt\, \frac{L}{\mu r^2(t)}$$

Dal momento che θ è un angolo, ci interessa $[\theta]_{\mathrm{mod}\, 2\pi}$

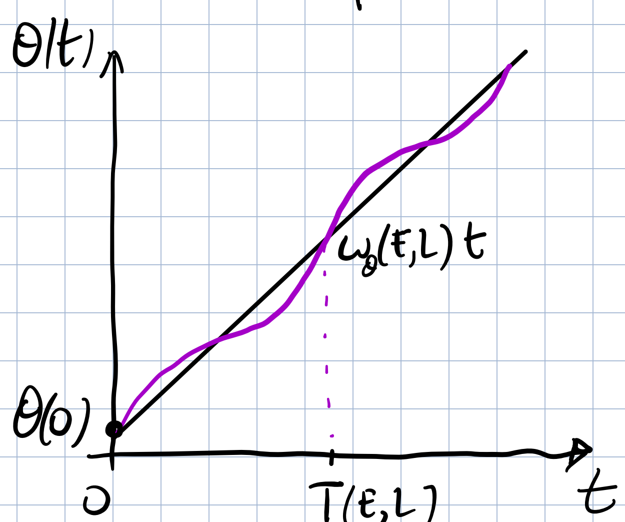
$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t dt'\,\dot\theta(t') = \omega_\theta(E,L)\,t + \theta(0) + \int_0^t dt'\left(\dot\theta(t') - \langle\dot\theta\rangle\right)$$

$$= F\left(\frac{\omega_\theta t}{2\pi}\right) + G\left(\frac{\omega_\theta t}{2\pi}\right)$$

Questa è una funzione G periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_\theta(E,L)}$

$$F\left(\frac{\omega_\theta t}{2\pi}\right) = \left[\omega_\theta t + \theta(0)\right]_{\mathrm{mod}\, 2\pi}$$

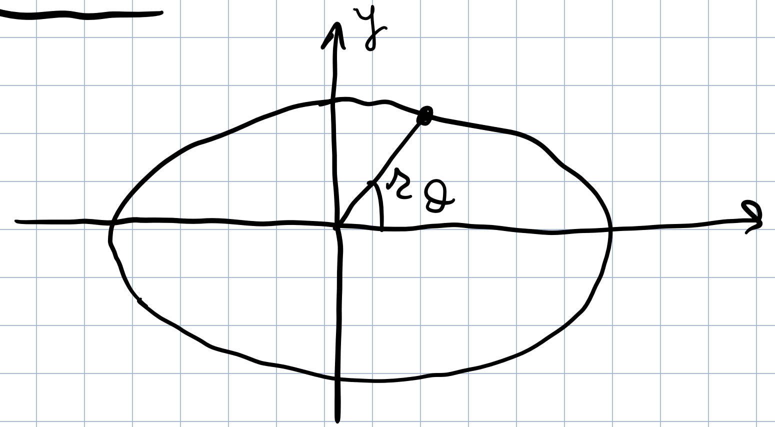
è periodica con periodo $2\pi/\omega_\theta(E,L)$



Dunque il moto in θ è la somma di due moti periodici

$\Rightarrow$ moto periodico o quasi-periodico

Riassumendo:



r oscilla tra r_- e r_+ con periodo $T(E,L) = \dfrac{2\pi}{\omega_r(E,L)}$

θ è la somma di due moti periodici con $\dfrac{2\pi}{\omega_\theta(E,L)}$ e $T(E,L)$

Il moto è periodico se $\dfrac{\omega_\theta(E,L)}{\omega_r(E,L)} \in \mathbb{Q}$, altrimenti è quasi periodico

Scriviamo meglio il rapporto tra le frequenze.

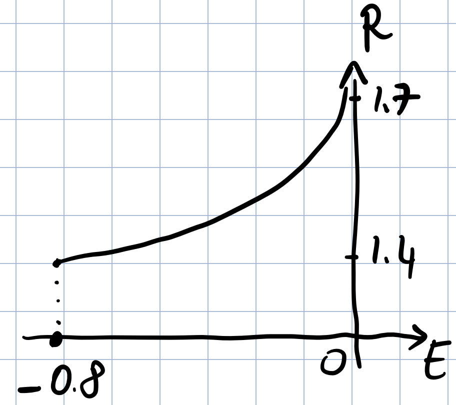
$$T(E,L) = \int_0^{T(E,L)} dt = 2\int_{r_-}^{r_+} dr\, \frac{1}{\dot r} = 2\int_{r_-}^{r_+} dr\, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V_{eff}^L(r)\right)}}$$

$$R = \frac{\omega_\theta}{\omega_r} = \frac{T}{2\pi}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{L}{\mu r^2} = \frac{1}{\pi}\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\dot r}\,\frac{L}{\mu r^2} = \frac{1}{\pi}\int_{r_-}^{r_+} dr\, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - V_{eff}(r)\right]}}\,\frac{L}{\mu r^2}$$

In generale, R dipende da E.

Esempio: $V(r) = -\dfrac{1}{r^{3/2}}$

$L = \mu = 1$

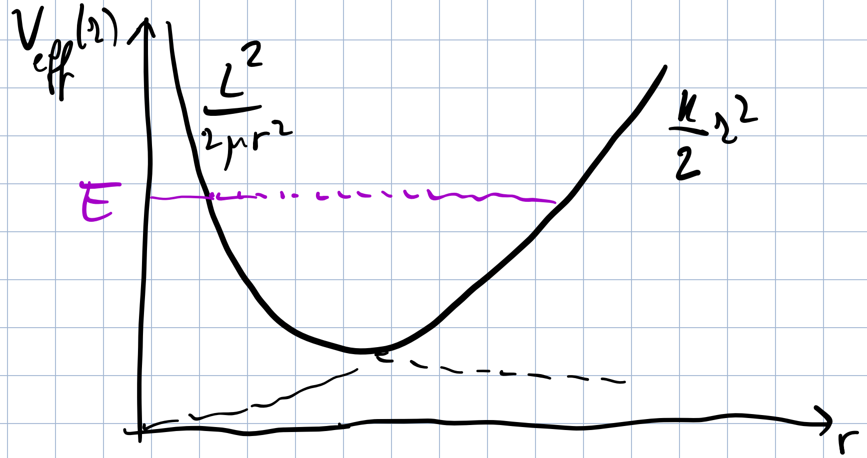


Abbiamo due casi notevoli:

- Potenziale armonico $V(r) = \frac{k}{2} r^2$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

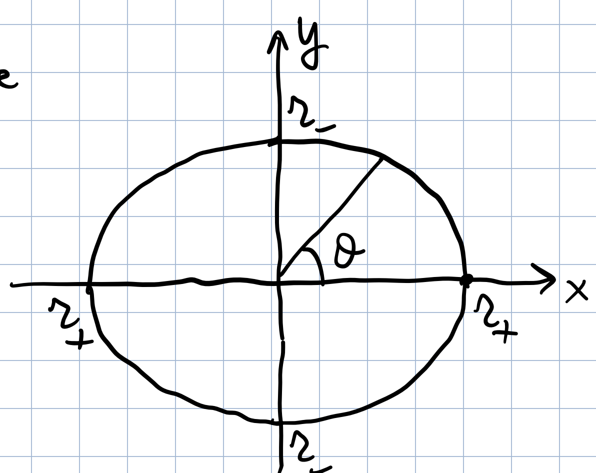
$$R = \frac{1}{2}$$



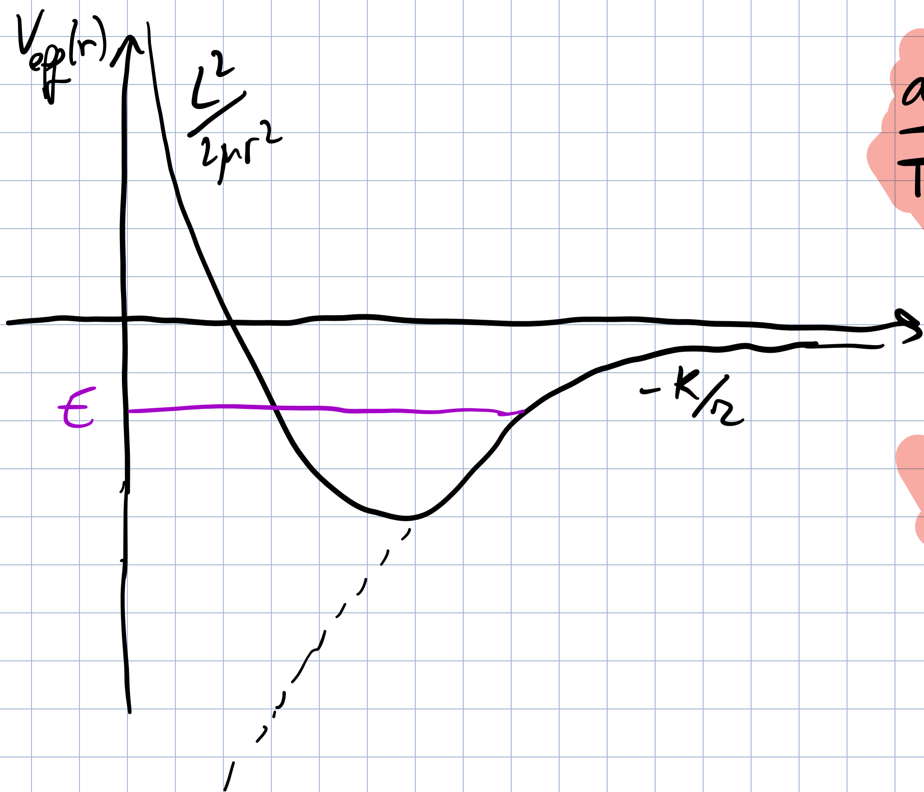
Tutte le orbite sono periodiche

Il periodo non dipende da E ed L

Un giro completo di θ corrisponde a due periodi in r



- Potenziale gravitazionale $V(r) = -\frac{k}{r}$ $\quad K = G m_1 m_2$



$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K}{4\pi^2 \mu}$$

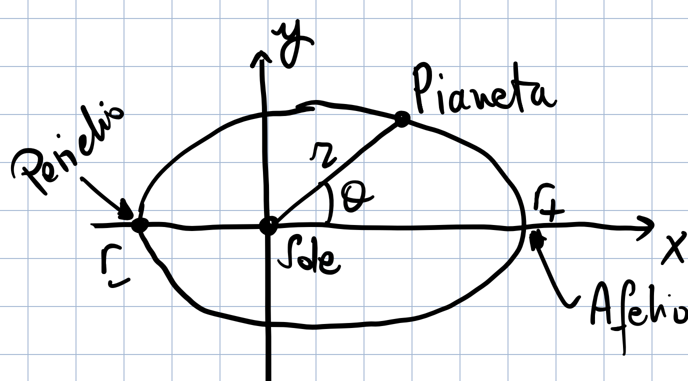
(Keplero)

$R = 1$

Solo i moti di bassa energia sono periodici

Il periodo dipende da E e L

Un giro completo corrisponde a un periodo in r



Precessione del perielio.

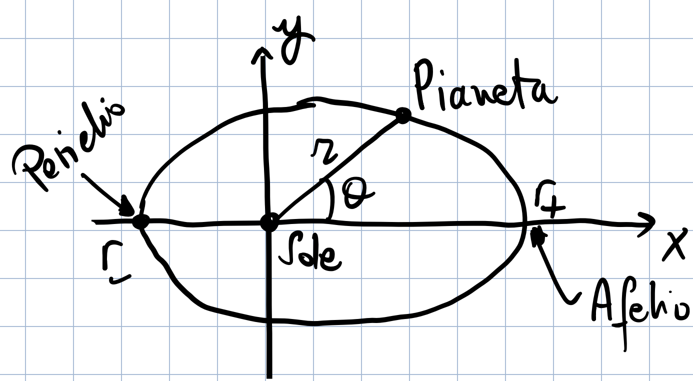
Supponiamo che $V(r) = -\frac{k}{r} + \delta V(r)$

↑ Piccola perturbazione

Abbiamo

Piccola correzione

$$R = \frac{\omega_\theta}{\omega_r} = \frac{1}{\pi}\int_{r_-}^{r_+} dr \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - V_{eff}(r)\right]}} \frac{L}{\mu r^2} \approx 1 + \varepsilon$$



Se R non è esattamente 1, in un periodo di r il pianeta ritorna nel perielio con un angolo leggermente diverso:

$$\delta\theta = \omega_\theta \cdot T_r - 2\pi = 2\pi\left(\frac{\omega_\theta}{\omega_r} - 1\right) = 2\pi(R-1) = 2\pi\varepsilon$$

Questo fenomeno è detto precessione del perielio

Precessione del perielio di Mercurio

Il pianeta Mercurio ha la precessione più grande tra i pianeti del sistema solare, con $\delta\theta \sim 5600''$ ogni secolo.

Il grosso viene dalla presenza di altri pianeti, che possono essere trattati come piccole perturbazioni (vedremo più avanti nel corso come si fa)
Tuttavia la predizione risultante dagli altri pianeti è di $\sim 5557''$/secolo, con uno scarto di $\sim 43''$.

La relatività generale prevede una piccola correzione al potenziale gravitazionale del sole. Una maniera di scriverla è (cf. note Tong)

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}\left(1 + \frac{3GM}{c^2 r}\right)$$

Calcoliamo la precessione dovuta a questa correzione.
Abbiamo $m \sim \mu$ perché $m \ll M$.

$$R = \frac{\omega_\theta}{\omega_r} = \frac{1}{\pi}\int_{r_-}^{r_+} dr \, \frac{L}{\mu r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{GMm}{r} + \frac{3G^2M^2m}{c^2 r^2}\right]}}$$

$$= \frac{L}{\tilde{L}} \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{r_-}^{r_+} dr \, \frac{\tilde{L}}{\mu r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E + \frac{GMm}{r} - \frac{\tilde{L}^2}{2\mu r^2}\right]}}}_{=1 \text{ perché è } R \text{ per } L \to \tilde{L}} = \frac{L}{\tilde{L}}$$

$$\frac{\tilde{L}^2}{2\mu} = \frac{L^2}{2\mu} - \frac{3G^2M^2m}{c^2} \Rightarrow \tilde{L} \approx L\left(1 - \frac{3G^2M^2m^2}{L^2c^2}\right)$$

$$R = 1 + \frac{3G^2M^2m^2}{L^2c^2} \qquad \varepsilon = R - 1 \approx 7.99 \cdot 10^{-8}$$

Usando $L = \mu r^2 \dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}\mu a^2 \sqrt{1-e^2}$, in un periodo abbiamo

$$\delta\theta = 2\pi\varepsilon = 5.01 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0.10''$$

$$\left(\begin{array}{ll} 1'' = \frac{1}{3600} \text{ gradi} & 180 \text{ gradi} = \pi \text{ rad} \\ 1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \cdot 3600'' & \end{array}\right)$$

e in un secolo abbiamo ($T = 87.97$ giorni)

$$\delta\theta_{sec} = \delta\theta_T \, \frac{1 \text{ secolo}}{T} = 0.10'' \times \frac{3.154 \cdot 10^9 \text{ s}}{T} = 43''$$

Questo fu uno dei primi grandi successi della relatività generale