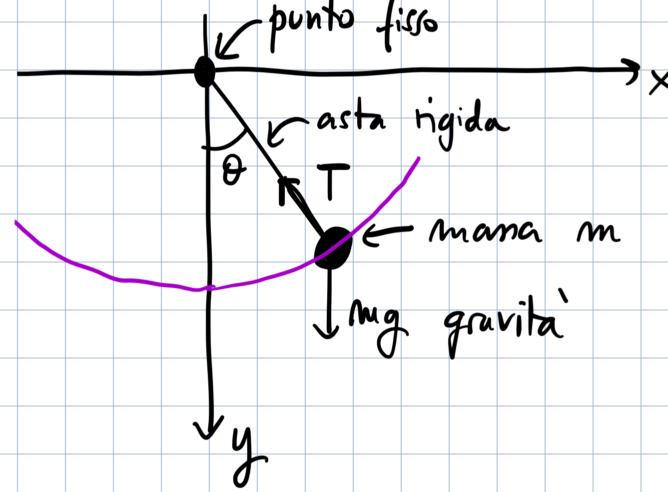
4. Moti vincolati

Spesso i moti avvengono lungo traiettorie vincolate

Esempio: pendolo



Il moto del pendolo avviene lungo la circonferenza

$$\begin{cases} x = \ell \sin\theta \\ y = \ell \cos\theta \end{cases}$$

Ci sono delle forze interne (forza sul perno, tensione dell'asta) che mantengono vincolato il moto, dette reazioni vincolari

Queste forze sono complicate da descrivere.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T\,x/\ell \\ m\ddot{y} = -T\,y/\ell + mg \end{cases} \qquad \underset{\text{vincolo}}{x^2+y^2=\ell}$$

Cerchiamo $T(\theta)$ tale da mantenere il vincolo. Dalla prima eq:

$$\dot{x} = \ell\cos\theta\,\dot\theta$$

$$\ddot{x} = \ell\cos\theta\,\ddot\theta - \ell\sin\theta\,\dot\theta^2$$

$$T(\theta) = -\frac{m\ddot{x}}{x/\ell} = -m\ell\,\frac{\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2}{\sin\theta} = m\ell\,\dot\theta^2 - m\ell\,\frac{\ddot\theta\cos\theta}{\sin\theta}$$

La seconda equazione diventa

$$\dot{y} = -\ell\sin\theta\,\dot\theta$$

$$m\ddot{y} = -m\ell\sin\theta\,\ddot\theta - \cancel{m\ell\cos\theta\,\dot\theta^2} = -T\cos\theta + mg$$

$$= -\cancel{m\ell\cos\theta\,\dot\theta^2} + m\ell\,\ddot\theta\,\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + mg$$

Dunque

$$-\cancel{m}\ell\,\ddot{\theta}\,\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta} = \cancel{m}g \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \ddot{\theta} = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta \\[2ex] T(\theta) = m\ell\,\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \end{cases}$$

Il risultato è semplice ma il procedimento è complicato dalla necessità di calcolare $T(\theta)$

Difficile da generalizzare a vincoli più complicati

Possiamo formulare il moto vincolato senza conoscere le reazioni vincolari?

a. Vincoli olonomi e moltiplicatori di Lagrange

Un vincolo olonomo ha la forma

$$\varphi(x_1 \dots x_N) = 0 \qquad \text{(non dipende da } \dot{x}\text{)}$$

Pendolo: $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - \ell^2) = 0$

Idea formale

Aggiungiamo alla Lagrangiana una nuova coordinata λ:

$$\mathcal{L}'(\dot{x}, x, \dot{\lambda}, \lambda) = \mathcal{L}(\dot{x}, x) + \lambda\,\varphi(x)$$

Scriviamo le equazioni del moto:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} = 0 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \varphi(x) \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \end{cases}$$

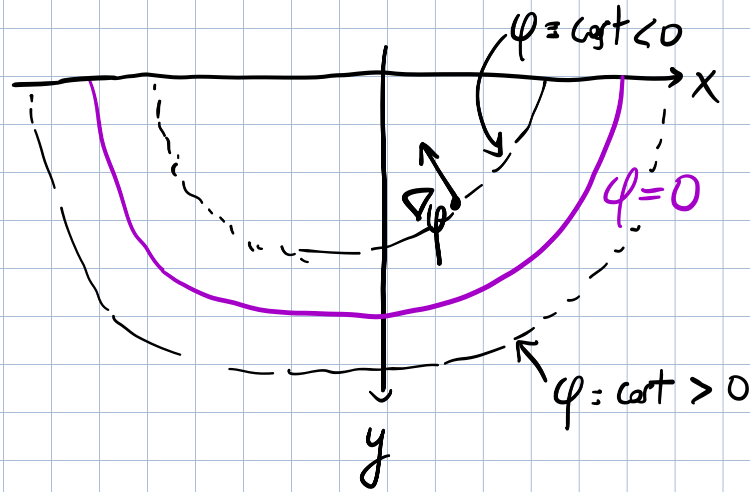
L'equazione del moto per λ impone il vincolo

dette "equazioni di Lagrange del primo tipo".

Dunque

- x verifica l'equazione solita ma con una forza aggiuntiva proporzionale a $\nabla\varphi$
- λ è determinato dalla condizione $\varphi(x) = 0$

Nel caso del pendolo:



$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 - \ell^2\right)$$

$$\nabla\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Il gradiente di φ è ortogonale alle linee $\varphi = cost$.

$$\mathcal{L}'(\dot{x},\dot{y},\dot{\lambda},x,y,\lambda) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy + \frac{\lambda}{2}\left(x^2+y^2-\ell^2\right)$$

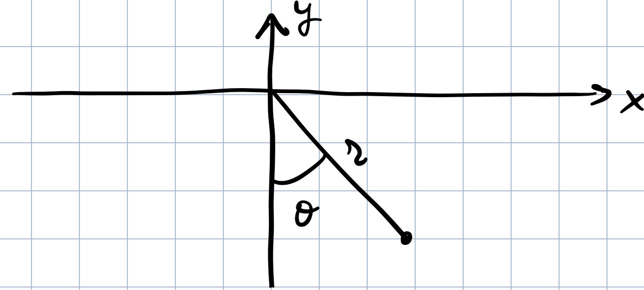
Equazioni del moto:
$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda x \\ m\ddot{y} = \lambda y + mg \\ x^2 + y^2 - \ell^2 = 0 \end{cases}$$

dunque $\lambda = -\dfrac{T}{\ell}$ è proporzionale alla tensione.

Abbiamo incluso i vincoli nel formalismo Lagrangiano, ma le equazioni del moto sono sempre le stesse dunque abbiamo ancora il problema di calcolare λ

Il vantaggio del formalismo lagrangiano è che possiamo fare dei cambiamenti di coordinate.

Passiamo in coordinate polari



$$x = r \sin\theta$$
$$y = r \cos\theta$$

$$\mathcal{L}'(\dot r, \dot\theta, \dot\lambda, r, \theta, \lambda) = \frac{1}{2} m \left(\dot r^2 + r^2 \dot\theta^2\right) + m g r \cos\theta + \frac{\lambda}{2}\left(r^2 - \ell^2\right)$$

Equazioni del moto:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\lambda} = 0 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \dfrac{1}{2}\left(r^2 - \ell^2\right) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot r} = m \ddot r = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m r \dot\theta^2 + m g \cos\theta + \lambda r \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = \dfrac{d}{dt}\left(m r^2 \dot\theta\right) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = - m g r \sin\theta \end{cases}$$

La prima equazione, $r = \ell \Rightarrow \dot r = \ddot r = 0$ impone il vincolo

La seconda $0 = m \ell \dot\theta^2 + m g \cos\theta + \lambda \ell$ fornisce $\lambda = - T/\ell$

La terza diventa $\dot\theta = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta$ l'equazione del moto sul vincolo

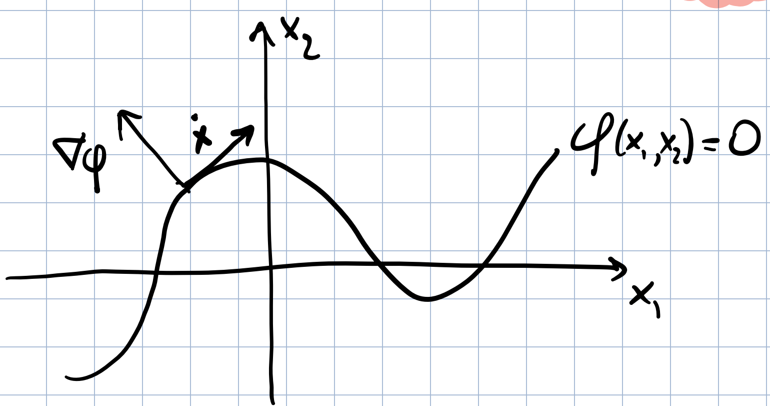
Le cose si sono semplificate. Perché?

Perché il vincolo non dipende da θ dunque $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$ non contiene la reazione vincolare.

Abbiamo usato le coordinate "giuste": θ sul vincolo, r ortogonale

b. Vincoli perfetti e principio di d'Alembert

Abbiamo visto che le cose sono particolarmente semplici se il vincolo è olonomo, $\varphi(x)=0$, e la reazione vincolare è proporzionale a $\nabla\varphi$
"vincolo olonomo perfetto".



Nel formalismo di Newton questa è una scelta non banale della reazione vincolare

$$m\ddot{x} = -\nabla V(x) + \lambda\nabla\varphi(x)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\cdot\ddot{x} + \nabla V(x)\cdot\dot{x} = \dot{x}\cdot\left(m\ddot{x} + \nabla V(x)\right)$$

$$= \dot{x}\cdot(\lambda\nabla\varphi(x)) = \lambda\frac{d}{dt}\varphi(x)$$

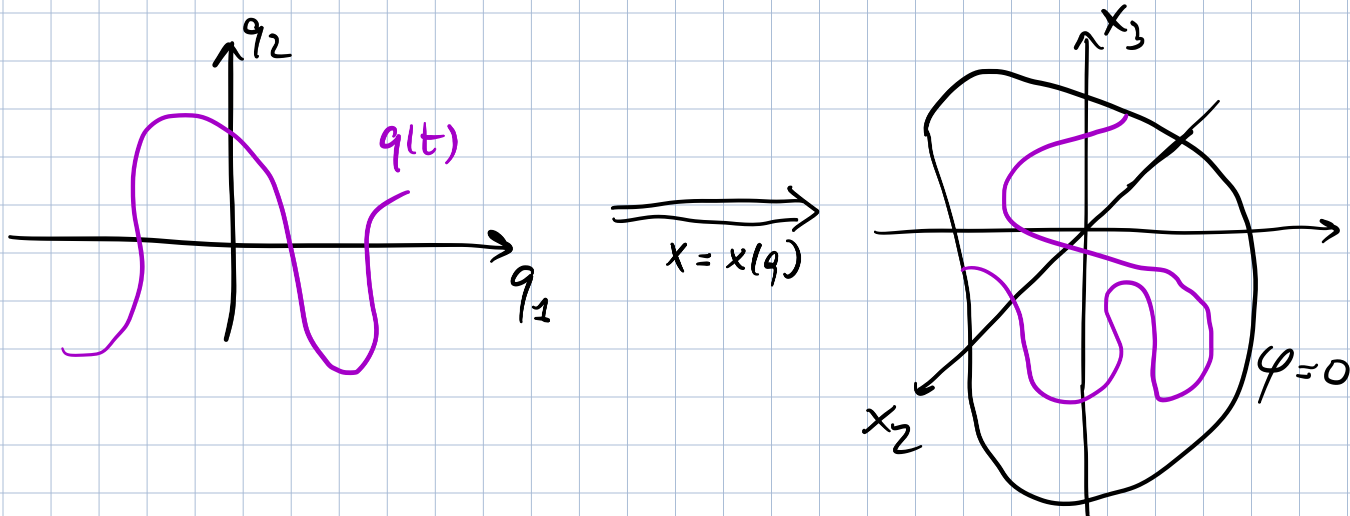
Se il vincolo è soddisfatto $\varphi=0$ e $\frac{d\varphi}{dt}=0$
dunque l'energia è conservata:
il lavoro delle reazioni vincolari è nullo!

In generale, per vincoli olonomi perfetti vale un principio di minima azione ristretto al vincolo detto "principio di d'Alembert".

Consideriamo $X = (x_1, x_2 \dots x_N) \in \mathbb{R}^N$ con un vincolo olonomo perfetto $\varphi(x_1 \dots x_N)$

Il vincolo identifica una superficie di dimensione $N-1$ (esempio: piano $\varphi = \sum_i x_i - \ell$, sfera $\varphi = \sum_i x_i^2 - \ell^2$)

Chiamiamo $q_1 \dots q_{N-1}$ un sistema di coordinate sul vincolo.



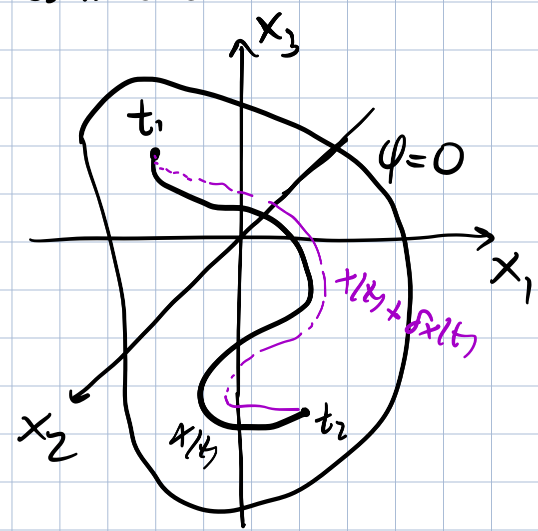
Il vincolo $\varphi(x) = 0$ è soddisfatto se $x = x(q)$

esempio $\quad x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \quad$ se $q = \theta$ e $x = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

un moto $q(t) \in \mathbb{R}^{N-1}$ diventa un moto $x(q(t)) \in \mathbb{R}^N$ sul vincolo $\varphi(x(q(t))) = 0$.

Osserviamo che $\frac{d}{dt}\varphi = \nabla\varphi \cdot \dot{x} = 0$ per qualunque moto, non solo per i moti fisici (= che verificano le equazioni di Newton)

Principio di d'Alembert – prima dimostrazione



$$A[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 - V(x(t))\right]$$

$$A[x(t)+\delta x(t)] \approx A(x(t)]$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m\dot{x}(t)\,\delta\dot{x}(t) - \nabla V(x(t))\,\delta x(t)\right] + O(\delta x^2)$$

$$= A[x(t)] - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m\ddot{x}(t) + \nabla V(x(t))\right] \cdot \delta x(t) + O(\delta x^2)$$

$$= A[x(t)] - \int_{t_1}^{t_2} dt\, \lambda \nabla\varphi(x(t)) \cdot \delta x(t) + O(\delta x^2)$$

Uno spostamento $\delta x(t)$ infinitesimo compatibile con il vincolo è tangente al vincolo, dunque $\nabla\varphi(x(t)) \cdot \delta x(t) = 0$ e la variazione di A al primo ordine in δx è nulla.

Dunque l'azione è stazionaria sul moto reale

(quello che soddisfa $m\ddot{x} + \nabla V = \lambda\nabla\varphi$)

Da questo segue che posso calcolare l'azione soltanto sui moti compatibili col vincolo.

$$A[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}(q(t))^2 - V(x(q(t)))}_{= \mathcal{L}(\dot{q}, q)} \right]$$

$$\dot{x}_i(q) = \sum_a \frac{\partial x_i}{\partial q_a} \dot{q}_a$$

Ottengo una Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} m \sum_i \left(\sum_a \frac{\partial x_i}{\partial q_a} \dot{q}_a \right) \left(\sum_b \frac{\partial x_i}{\partial q_b} \dot{q}_b \right) - V(x(q))$$

$$= \frac{1}{2} m \sum_{ab} g_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b - V(x(q))$$

con $g_{ab}(q) = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a} \frac{\partial x_i}{\partial q_b}$

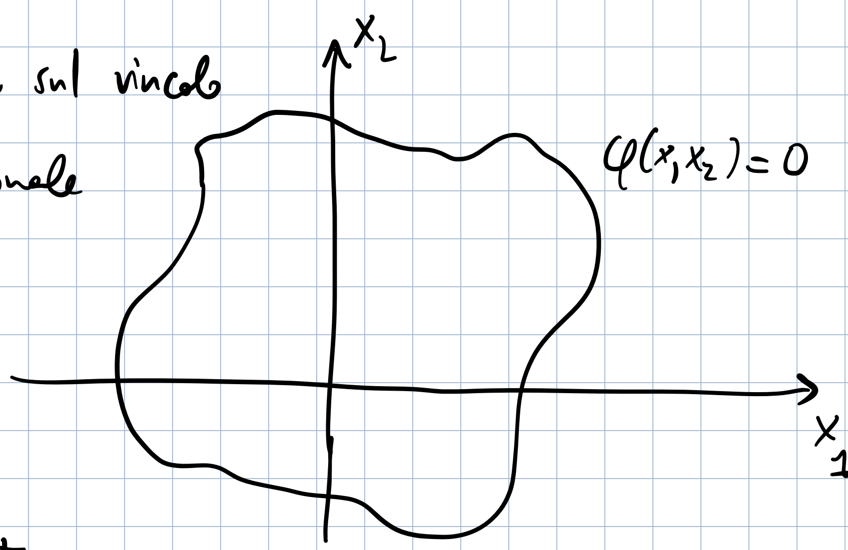
e le solite equazioni

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}}$$

Principio di d'Alembert – seconda dimostrazione

$q_1 \dots q_{N-1}$ coordinate sul vincolo

φ coordinata ortogonale al vincolo



Cambio di coordinate:

$$x \longrightarrow q, \varphi$$

Usiamo un moltiplicatore:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\dot{x}, x) + \lambda \varphi(x) \rightarrow \mathcal{L}(\dot{q}, q, \dot{\varphi}, \varphi) + \lambda \varphi$$

Equazioni del moto:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\lambda}} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda} = \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = 0, \ddot{\varphi} = 0, \dots$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

Come nell'esempio del pendolo, la prima equazione impone il vincolo, la seconda fornisce la reazione vincolare. La terza fornisce l'equazione del moto sul vincolo, cioè per le variabili q.

Scriviamo più esplicitamente la terza equazione.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(\dot q, q, \dot\varphi, \varphi)}{\partial \dot q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(\dot q, q, \varphi=\dot\varphi=0)}{\partial \dot q} + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q\,\partial \dot\varphi}\ddot\varphi} + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q\,\partial \varphi}\dot\varphi}$$

Questi due termini si annullano dato che $\dot\varphi = \ddot\varphi = 0$

dunque otteniamo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(\dot q, q, \varphi=\dot\varphi=0)}{\partial \dot q} = \frac{\partial \mathcal{L}(\dot q, q, \varphi=\dot\varphi=0)}{\partial q}$$

Posso ignorare le prime due equazioni e usare

$$\tilde{\mathcal{L}}(\dot q, q) = \mathcal{L}(\dot q, q; \dot\varphi=\varphi=0) \qquad \text{Lagrangiana vincolata}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q}$$

Concludiamo che possiamo dimenticare il vincolo e limitarci a scrivere le equazioni per q

Esempio del pendolo:

$$\mathcal{L}(\dot\theta, \theta, r=\ell) = \frac{m}{2}\ell^2\dot\theta^2 + mg\ell\cos\theta$$

dunque

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = m\ell^2\ddot\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mg\ell\sin\theta \Rightarrow \ddot\theta = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

NB In presenza di più vincoli ripetiamo lo stesso procedimento con più variabili λ

Nel caso del moto centrale avevamo un "vincolo" $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ che non è olonomo perché dipende dalla velocità dunque non possiamo sostituirlo nella Lagrangiana

c. Vincoli olonomi perfetti dipendenti dal tempo

Lagrangiana dipendente dal tempo

Per prima cosa mostriamo che se la Lagrangiana dipende esplicitamente dal tempo, $\mathcal{L}(\dot{x},x,t)$, vale ugualmente il principio di azione.

Ripetiamo la dimostrazione:

$$A[x+\varepsilon\delta x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}\left[\dot{x}(t)+\varepsilon\delta\dot{x}(t),\ x(t)+\varepsilon\delta x(t),\ t\right]$$

$$\approx A[x] + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\varepsilon\delta\dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\varepsilon\delta x$$

Non cambia niente perché t rimane invariato.

$$= A[x] - \varepsilon\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right]\delta x$$

Dunque

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}}$$

Equazione di Eulero-Lagrange

L'equazione di Eulero-Lagrange non cambia

Esempio: $\mathcal{L}(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x,t)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}$$

Potenziale dipendente dal tempo

Esempio: $\mathcal{L}(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{2} m(t)\dot{x}^2 - V(x)$

Massa dipendente dal tempo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(t)\dot{x}(t) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\left[m(t)\dot{x}(t)\right] = \dot{m}\dot{x} + m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -V'(x)$$

$$\dot{m}\dot{x} + m\ddot{x} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -V'(x)$$

Quantita' di moto

Vincolo dipendente dal tempo

Consideriamo ora un vincolo $\varphi(x,t)=0$
con reazione vincolare $\lambda \nabla_x \varphi(x,t)$
dunque $m\ddot{x} = -\nabla_x V(x) + \lambda \nabla_x \varphi$

Il moto si svolge sul vincolo dunque

$$\varphi(x(t),t)=0 \Rightarrow 0=\frac{d}{dt}\varphi(x(t),t) = \nabla_x\varphi \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Stavolta la velocità non è ortogonale al vincolo.

Supponiamo di aver trovato un sistema di coordinate q che parametrizza il vincolo ad ogni tempo t, ovvero $x(q,t)$ si trova sul vincolo al variare di q.

Dunque $\varphi(x(q,t),t)=0$

Se facciamo variare una qualsiasi delle q,

$$0=\frac{\partial}{\partial q_a}\varphi(x(q,t),t) = \nabla_x\varphi \cdot \frac{\partial x}{\partial q_a} \qquad \forall a$$

Quindi la variazione di x è ortogonale al gradiente.

Scriviamo la variazione dell'azione come al solito

$$A[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - V(x(t))\right]$$

$$\delta A[x(t)] = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m \dot{x}\, \delta\dot{x} - \nabla_x V(x)\, \delta x\right]$$

$$= -\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m \ddot{x} + \nabla_x V(x)\right] \cdot \delta x$$

$$= -\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \quad \lambda \nabla_x \varphi \cdot \delta x$$

se $\quad x(t) = x(q(t), t)$

$$\delta x(t) = x(q(t) + \delta q(t), t) - x(q(t), t) \approx \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \delta q$$

Dunque se $x(t) = x(q(t), t)$ abbiamo $\nabla_x \varphi \cdot \delta x = 0$

e l'azione è stazionaria rispetto alle variazioni $\delta q(t)$

Possiamo allora scrivere $A[q(t)]$

Usiamo $\quad x(t) = x(q(t), t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$A[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - V(x(q(t)), t) \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \; \mathcal{L}(\dot{q}, q, t)$$

e le equazioni del moto sono $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$

La procedura è la stessa:

1) Scrivere la Lagrangiana senza vincoli

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\underline{x}}_i^2 - V(\underline{x}_1 \dots \underline{x}_N)$$

2) Trovare un sistema di coordinate $\underline{q}$ tale che $\underline{x}(\underline{q}, t)$ rispetta i vincoli a t fissato

3) Sostituire

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q, t) = \mathcal{L}\left(\dot{x} \to \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}, \, x \to x(q, t) \right)$$

4) Ottenere le equazioni del moto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

d. Vincoli reali e convergenza al caso perfetto

Finora abbiamo considerato vincoli ideali che impongono esattamente la condizione $\varphi(x) = 0$

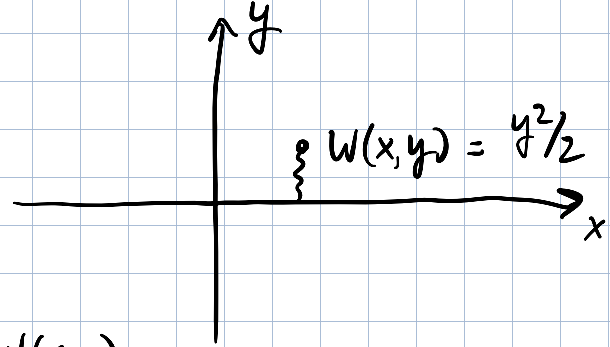
Esempio: pendolo con asta perfettamente rigida

Nella realtà i vincoli sono sempre approssimati

Come si converge al caso ideale?

Esempio

Moto vincolato a $y=0$



$$m\ddot{x} = -V'(x) - \gamma\,\partial_x W(x,y)$$
$$m\ddot{y} = -\gamma\,\partial_y W(x,y)$$

Proviamo a imporre il vincolo attraverso un potenziale $W(x,y)$ di intensità $\gamma \to \infty$

Vogliamo $W(x, y=0) = 0$ e $W(x, y\neq 0) > 0$

Prendiamo $W(x,y) = y^2/2$

$$m\ddot{x} = -V'(x) \quad \longrightarrow x \text{ è quello che vogliamo}$$
$$m\ddot{y} = -\gamma y$$

$$y(t) = y_0 \cos(\tilde{\omega} t) + \frac{\dot{y}_0}{\tilde{\omega}} \sin(\tilde{\omega} t) \qquad \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_0^2 + V(x_0) + \gamma \frac{y_0^2}{2}$$

se vogliamo E finita per $\gamma \to \infty$, bisogna che $y_0 \sim \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \to 0$

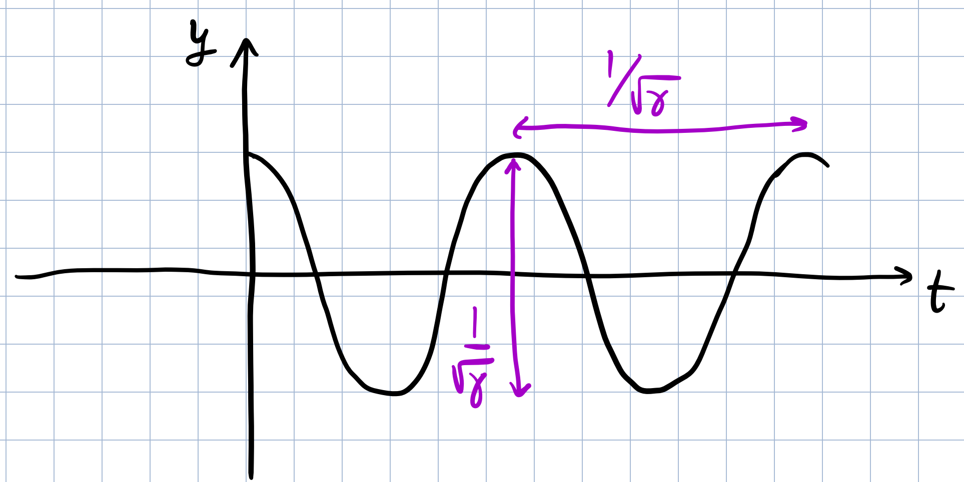
Dunque $y(t) \xrightarrow[\gamma \to \infty]{} 0$ perché $y_0 \sim \frac{1}{\tilde{\omega}} \sim \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \longrightarrow 0$

Tuttavia

$$\dot{y}(t) = -\tilde{\omega}\, y_0 \sin(\tilde{\omega} t) + \dot{y}_0 \cos(\tilde{\omega} t)$$

rimane finita perché $\dot{y}_0$ è finita e $\tilde{\omega} y_0 \sim \sqrt{\gamma}\, y_0$ anche.

Conclusione:



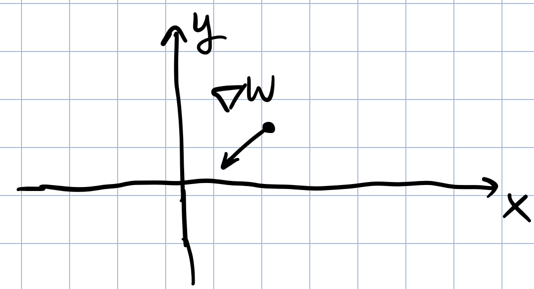
L'ampiezza e il periodo delle oscillazioni trasverse al vincolo vanno insieme a zero dunque la velocità

$\dot{y} \approx y/T$ rimane finita

Più il vincolo è rigido, più ci sono piccole vibrazioni di alta frequenza

Esempio Come prima, ma $W(x,y) = \frac{1}{2} y^2 (1+x^2)$

$$m\ddot{x} = -V'(x) - \gamma y^2 x$$
$$m\ddot{y} = -\gamma y (1+x^2)$$



NB Adesso la reazione vincolare non è più ortogonale al vincolo.

Prendiamo un tempo piccolo, $x(t) \approx x_0$ e $y_0 = 0$

$$m\ddot{y} = -\gamma y (1+x_0^2) \Rightarrow y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\tilde{\omega}} \sin(\tilde{\omega} t)$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\gamma}{m}(1+x_0^2)}$$

Come nel caso precedente, $y \sim 1/\sqrt{\gamma}$

Ma allora γy^2 è finito e dunque

$$m\ddot{x} = -V'(x) - \frac{\gamma \dot{y}_0^2}{\tilde{\omega}^2} \sin^2(\tilde{\omega} t)\, x$$

Quando $\gamma \to \infty$ le oscillazioni di y sono velocissime e si mediano: $\sin^2(\tilde{\omega} t) \approx \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \sin^2\theta = \frac{1}{2}$

$$\boxed{m\ddot{x} = -V'(x) - \frac{m\dot{y}_0^2}{2(1+x_0^2)}\, x}$$

← Questo termine non si annulla

Questo si può generalizzare. Se abbiamo un vincolo reale con potenziale $W(x)$ tale che

$$W(x) = 0 \quad \text{quando} \quad \varphi(x) = 0$$
$$W(x) > 0 \quad \text{quando} \quad \varphi(x) \neq 0$$

e $\nabla W(x)$ è sempre ortogonale al vincolo, allora per $\gamma \to \infty$ si converge al caso ideale.

NB: Una buona scelta è $W(x) = \varphi(x)^2/2$