5. Il corpo rigido

a. Corpo rigido come problema con vincoli

Molecola biatomica

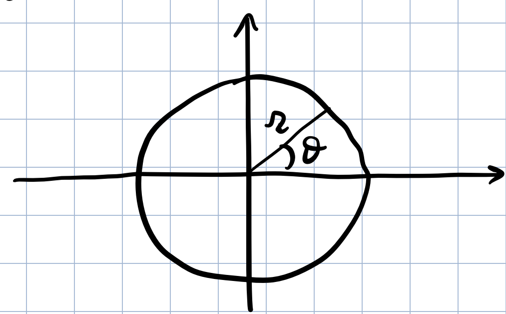
$$V = k(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2| - \ell)^2/2$$

$\underline{x}_1$ $\underline{x}_2$

Possiamo usare tutti i risultati del problema dei due corpi con $v(r) = \frac{k}{2}(r-\ell)^2$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}(r-\ell)^2$$

Il vincolo e' ortogonale alla superficie $r = \ell$



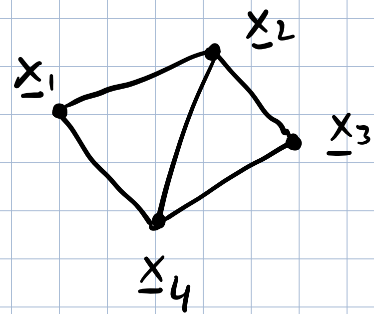
Nel limite $k \to \infty$ possiamo considerare il moto vincolato con $\varphi(r) = r - \ell$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

Lagrangiana di una molecola rigida nel riferimento in cui L e' diretto lungo z

$I = \mu\ell^2$ momento d'inerzia

Corpo rigido



Consideriamo un sistema di N punti $\{\underline{x}_i\}_{i=1\dots N}$

I vincoli impongono le distanze: $|\underline{x}_i - \underline{x}_j| = l_{ij}$

Consideriamoli come vincoli olonomi perfetti

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{x}}_i^2 + \text{vincoli}\{\, |\underline{x}_i - \underline{x}_j| = l_{ij} \,\}$$

Dato che i vincoli dipendono solo dalle distanze, possiamo separare il moto del centro di massa.

$$\underline{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \underline{x}_i \qquad \underline{r}_i = \underline{x}_i - \underline{R} \qquad \sum_i m_i \underline{r}_i = \underline{0}$$

vincolo supplementare

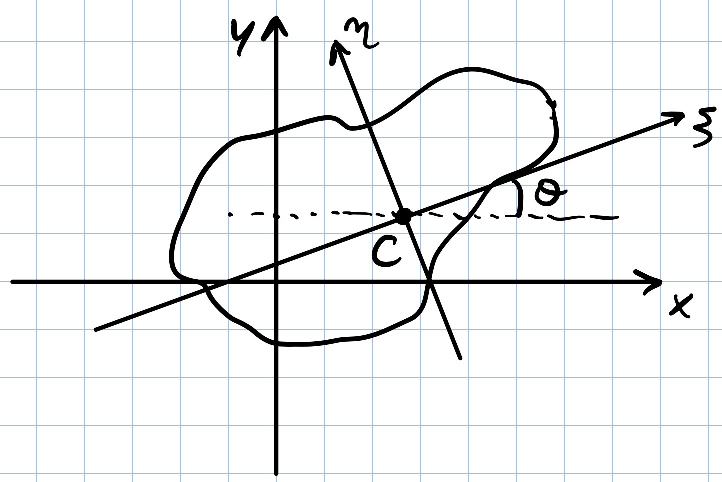
dunque

$$\underline{x}_i = \underline{r}_i + \underline{R}$$
$$\dot{\underline{x}}_i = \dot{\underline{r}}_i + \dot{\underline{R}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{\underline{R}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 + \text{vincoli} \begin{cases} |\underline{r}_i - \underline{r}_j| = l_{ij} \\ \sum_i m_i \underline{r}_i = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo trovare una parametrizzazione dei vincoli.

6. Corpo rigido in due dimensioni



Il problema si semplifica molto in due dimensioni.

Usiamo un punto C qualunque come riferimento.

La Lagrangiana (energia cinetica) è $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)$

Un sistema di coordinate che rispetta il vincolo è

$$\begin{cases} x_i = x_c(t) + \xi_i \cos\theta(t) - \eta_i \sin\theta(t) \\ y_i = y_c(t) + \xi_i \sin\theta(t) + \eta_i \cos\theta(t) \end{cases}$$

(ξ_i, η_i non dipendono da t)

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dot{x}_c - \xi_i \sin\theta\,\dot{\theta} - \eta_i \cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_i = \dot{y}_c + \xi_i \cos\theta\,\dot{\theta} - \eta_i \sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

Allora

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \Big[\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + (\xi_i^2 + \eta_i^2)\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}_c \xi_i \sin\theta\,\dot{\theta} + 2\dot{y}_c \xi_i \cos\theta\,\dot{\theta} - 2\dot{x}_c \eta_i \cos\theta\,\dot{\theta} - 2\dot{y}_c \eta_i \sin\theta\,\dot{\theta} \Big]$$

$$= \frac{1}{2}M(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 + K_c^{\xi}\left[-\dot{x}_c \sin\theta + \dot{y}_c\cos\theta\right]\dot{\theta} + K_c^{\eta}\left[-\dot{x}_c\cos\theta - \dot{y}_c\sin\theta\right]\dot{\theta}$$

dove
$$M = \sum_i m_i \qquad \text{massa totale}$$
$$I_C = \sum_i m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) \qquad \text{momento di inerzia}$$
$$K_C^\xi = \sum_i m_i \xi_i = M \xi_G$$
$$K_C^\eta = \sum_i m_i \eta_i = M \eta_G$$

dalla definizione di centro di massa $\begin{cases} \xi_G = \frac{1}{M} \sum_i m_i \xi_i \\ \eta_G = \frac{1}{M} \sum_i m_i \eta_i \end{cases}$

Quindi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2$$
$$+ M \xi_G [-\dot{x}_C \sin\theta + \dot{y}_C \cos\theta] \dot{\theta} + M \eta_G [-\dot{x}_C \cos\theta - \dot{y}_C \sin\theta] \dot{\theta}$$

Ricordiamo anche il teorema di Huygens-Steiner:

$$\xi_i = \xi_G + \delta\xi_i \qquad \eta_i = \eta_G + \delta\eta_i$$
$$I_C = \sum_i m_i [(\xi_G + \delta\xi_i)^2 + (\eta_G + \delta\eta_i)^2]$$
$$= \sum_i m_i (\xi_G^2 + \eta_G^2) + \underbrace{2\sum_i m_i (\delta\xi_i + \delta\eta_i)}_{=0} + \sum_i m_i (\delta\xi_i^2 + \delta\eta_i^2)$$

$$I_C = M(\xi_G^2 + \eta_G^2) + I_G \qquad I_G = \sum_i m_i (\delta\xi_i^2 + \delta\eta_i^2)$$

Casi particolari:

Se $C = G$: $\begin{matrix} \xi_G = 0 \\ \eta_G = 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} M (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2$

Se C è vincolato ad essere immobile (perno) allora

$$\begin{cases} \dot{x}_C = 0 \\ \dot{y}_C = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2$$

c. Corpo rigido in tre dimensioni

Dobbiamo trovare una parametrizzazione dei vincoli.

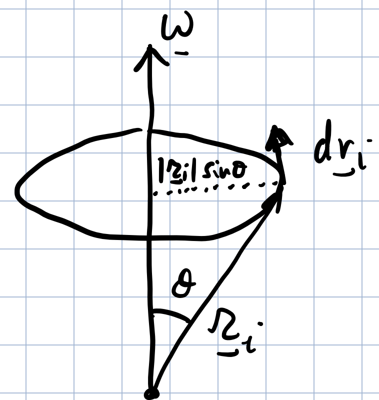
Abbiamo 6 gradi di libertà, tre traslazioni e tre rotazioni.

Il centro di massa è separabile

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{\underline{R}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{z}}_i^2 + \text{vincoli} \begin{cases} |\underline{z}_i - \underline{z}_j| = \ell_{ij} \\ \sum_i m_i \underline{z}_i = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo trovare tre gradi di libertà rotazionali.

Proviamo: $\dot{\underline{r}}_i(t) = \underline{\omega}(t) \times \underline{r}_i(t)$



$$d\underline{r}_i = \underline{\omega}\, dt \times \underline{r}_i$$

$$|d\underline{r}_i| = \underbrace{|\underline{\omega}|}_{\text{velocità angolare}} \underbrace{|\underline{r}_i| \sin\theta}_{\text{distanza dall'asse di rotazione}} dt$$

Verifichiamo:

1) $\frac{d}{dt} \sum_i m_i \underline{r}_i = \sum_i m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) = \underline{\omega} \times \sum_i m_i \underline{r}_i$

dunque se $\sum_i m_i \underline{r}_i(0) = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \underline{r}_i(t) = 0 \quad \forall t$

2) $\frac{d}{dt} |\underline{r}_i - \underline{r}_j| = \frac{\underline{r}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} - \frac{\underline{r}_j \cdot \dot{\underline{r}}_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = 0$ perché $\dot{\underline{r}}_i = \underline{\omega} \times \underline{r}_i$ è ortogonale a $\underline{r}_i$

Scriviamo l'energia cinetica: $\left[(\underline{a}\times\underline{b})^2 = \underline{a}^2\,\underline{b}^2 - (\underline{a}\cdot\underline{b})^2 \right]$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\underline{r}_i \times \underline{\omega})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\underline{\omega}^2 \underline{r}_i^2 - (\underline{\omega}\cdot\underline{r}_i)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\, \underline{\omega}\cdot \hat{I}\, \underline{\omega} \qquad \text{dove} \qquad \hat{I} = \sum_i m_i \left(\underline{r}_i^2\, \mathbb{1} - \underline{r}_i\, \underline{r}_i^T \right)$$

Ricordiamo la formula $\left[\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})\,\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\,\underline{c} \right]$

$$\underline{L}_R = \sum_i \underline{r}_i \times m_i \dot{\underline{r}}_i = \sum_i m_i\, \underline{r}_i \times (\underline{\omega}\times\underline{r}_i)$$

$$= \sum_i m_i \left[\underline{\omega}(\underline{r}_i^2) - \underline{r}_i(\underline{\omega}\cdot\underline{r}_i) \right] = \hat{I}\,\underline{\omega}$$

Queste espressioni sono valide in qualunque riferimento

Nel riferimento fisso $\underline{r}_i$ cambia nel tempo e anche $\hat{I}$.
Usiamo un riferimento che ruota con il corpo.
Allora $\underline{r}_i$ è costante e

$$\hat{I} = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $\hat{I}$ è una matrice simmetrica e per qualunque vettore $\underline{e}$ abbiamo

$$\underline{e}\,\hat{I}\,\underline{e} = \sum_i m_i \left[\underline{r}_i^2\, \underline{e}^2 - (\underline{r}_i\cdot\underline{e})^2 \right] \geq 0 \qquad \text{(per la dis. di Schwarz)}$$

dunque gli autovalori di $\hat{I}$ sono positivi.

Esiste un riferimento ortonormale solidale al corpo in cui

$$\{\underline{e}_1(t), \underline{e}_2(t), \underline{e}_3(t)\} \Rightarrow \hat{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Nel riferimento solidale $\underline{L}_R = L_1(t)\,\underline{e}_1(t) + L_2(t)\,\underline{e}_2(t) + L_3(t)\,\underline{e}_3(t)$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{L}_a = I_a \dot{\omega}_a \qquad a=1,2,3$$

Dato che i vettori $\underline{e}_a(t)$ sono solidali al corpo, abbiamo

$$\dot{\underline{e}}_a(t) = \underline{\omega}(t) \times \underline{e}_a(t) \qquad a=1,2,3$$

In assenza di forze esterne le equazioni di Eulero sono

$$0 = \frac{d}{dt}\underline{L}_R = \frac{d}{dt}\hat{I}\,\underline{\omega} = \sum_{a=1}^{3}\left[\dot{L}_a(t)\,\underline{e}_a(t) + L_a(t)\,\dot{\underline{e}}_a(t)\right]$$

$$= \sum_{a=1}^{3}\left\{ I_a \dot{\omega}_a(t)\,\underline{e}_a(t) + I_a \omega_a(t)\;\underline{\omega} \times \underline{e}_a(t) \right\}$$

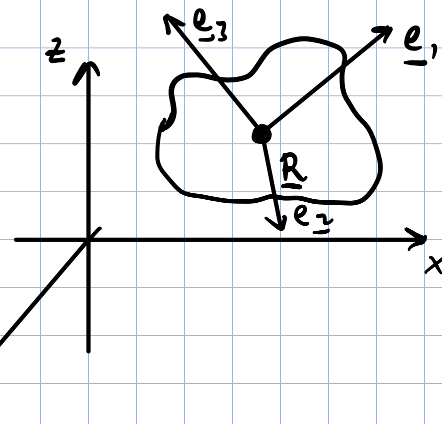
Allora proiettando questa equazione su $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3 (I_3 - I_2) = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1 (I_1 - I_3) = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2 (I_2 - I_1) = 0 \end{cases}$$

Dato che le ω_a sono velocità (angolari), le $\dot{\omega}_a$ sono accelerazioni $\Rightarrow$ le equazioni di Eulero sono equazioni analoghe a quelle di Newton

NB: $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ sono le componenti di $\underline{\omega}$ nel riferimento $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ solidale con il corpo

d. Lagrangiana del corpo rigido



Abbiamo scritto

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{\underline{R}}^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \hat{I} \underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\underline{R}}^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

La parte relativa ad $\underline{R}$ è separata, concentriamoci sulla parte angolare

Le componenti di $\underline{\omega}(t)$ non sono coordinate ma sono legate alle coordinate dette "angoli di Eulero"

Per scrivere correttamente la Lagrangiana dobbiamo esprimere $\underline{\omega}(t)$ nella base $(\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3)$ in funzione degli angoli di Eulero

Vogliamo dunque scrivere $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ in funzione degli angoli di Eulero

Seguiamo la trattazione nelle note di Tong sezione 3.4

DIM.

Euler's Theorem: An arbitrary rotation may be expressed as the product of 3 successive rotations about 3 (in general) different axes.

Proof: Let $\{\tilde{\mathbf{e}}_a\}$ be space frame axes. Let $\{\mathbf{e}_a\}$ be body frame axes. We want to find the rotation R so that $\mathbf{e}_a = R_{ab}\tilde{\mathbf{e}}_b$. We can accomplish this in three steps:

$$\{\tilde{\mathbf{e}}_a\} \xrightarrow{R_3(\phi)} \{\mathbf{e}'_a\} \xrightarrow{R_1(\theta)} \{\mathbf{e}''_a\} \xrightarrow{R_3(\psi)} \{\mathbf{e}_a\} \tag{3.35}$$

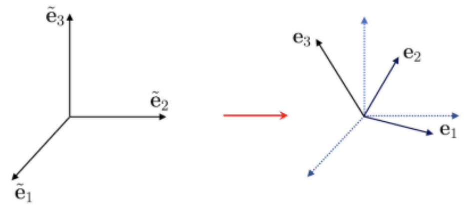


Figure 31: The rotation from space frame $\{\tilde{\mathbf{e}}_a\}$ to body frame $\{\mathbf{e}_a\}$.

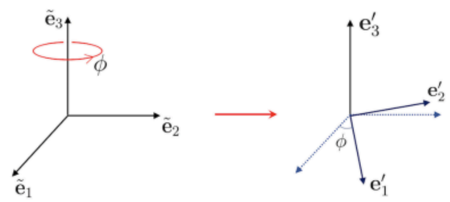
Let's look at these step in turn.

Step 1: Rotate by ϕ about the $\tilde{\mathbf{e}}_3$ axis. So $\mathbf{e}'_a - R_3(\phi)_{ab}\tilde{\mathbf{e}}_b$ with

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

This rotates the axes like this:

1

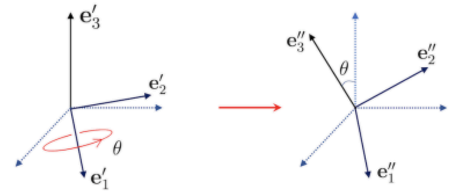


Step 2: The next step is to totate by θ about the *new* axis $\mathbf{e}'_1$. This axis $\mathbf{e}'_1$ is sometimes called the "line of nodes". We write $\mathbf{e}''_a = R_1(\theta)_{ab}\mathbf{e}'_b$ with

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

This time, it acts on the axes like this:

2

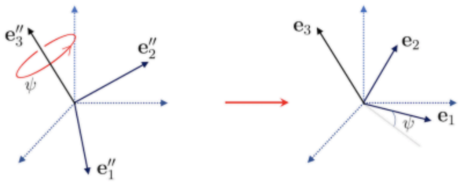


Step 3: Finally, we rotate by ψ about the *new new* axis $\mathbf{e}''_3$ so $\mathbf{e}_a = R_3(\psi)_{ab}\mathbf{e}''_b$ with

$$R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

This final rotation looks like this:

3



This brings us to the promised rotation shown in Figure 31. Putting it all together, we have

$$R_{ab}(\phi,\theta,\psi) = [R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\phi)]_{ab} \tag{3.39}$$

This is our claimed result. The angles ϕ, θ and ψ are known as *Euler angles*. □

If we write out the matrix $R(\phi,\theta,\psi)$ in longhand, it reads

$$R = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \sin\phi\cos\psi + \cos\theta\sin\psi\cos\phi & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\phi\sin\psi - \cos\theta\cos\psi\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\psi\cos\phi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

3.4.2 Angular Velocity

There is a simple expression for the instantaneous angular velocity $\boldsymbol{\omega}$ in terms of Euler angles. One way straightforward, but slightly tedious, way to derive this is to plug in the the expression (3.39) into the definition (3.6) of the angular momentum matrix $\Omega = \dot{R}R^{-1}$. However, a little thought about what this means physically will get us there quicker. Consider the motion of a rigid body in an infinitesimal time dt, during which each of the Euler angles will change a little

$$(\psi,\theta,\phi) \to (\psi + d\psi, \theta + d\theta, \phi + d\phi) \tag{3.40}$$

From the definition of the Euler angles, the angular velocity must be of the form

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\,\tilde{\mathbf{e}}_3 + \dot{\theta}\,\mathbf{e}'_1 + \dot{\psi}\,\mathbf{e}_3 \tag{3.41}$$

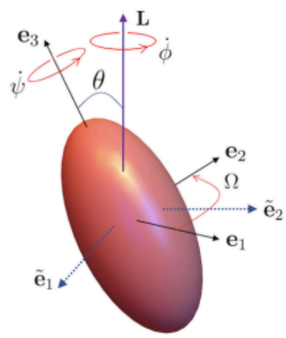


Figure 32: Euler angles for the free symmetric top when $\mathbf{L}$ coincides with $\tilde{\mathbf{e}}_3$

We just need to write each of these vectors in the same basis. We'll choose to write everything in the body frame basis $\{\mathbf{e}_a\}$. We can write the first two vectors above as

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = \sin\theta\sin\psi\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\cos\psi\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}'_1 = \cos\psi\,\mathbf{e}_1 - \sin\psi\,\mathbf{e}_2$$

from which we find the expression for the angular velocity $\boldsymbol{\omega}$ in terms of Euler angles in the body frame axis

$$\boldsymbol{\omega} = [\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi]\mathbf{e}_1 + [\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi]\mathbf{e}_2 + [\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta]\mathbf{e}_3 \tag{3.42}$$

By playing a similar game, we can also express $\boldsymbol{\omega}$ in the space frame axis.

Per scrivere $\underline{e}'_1$:

$$\underline{e}'_1 = \underline{e}''_1 \qquad \text{figura } (2)$$
$$\underline{e}''_1 = \cos\psi \, \underline{e}_1 - \sin\psi \, \underline{e}_2 \qquad \text{figura } (3)$$

Per scrivere $\underline{\tilde{e}}_3$:

$$\underline{e}_a = R_{ab} \underline{\tilde{e}}_b \Rightarrow \underline{\tilde{e}}_a = R^{-1}_{ab} \underline{e}_b$$

$$R = R_3(\psi) R_1(\theta) R_3(\phi)$$
$$R^{-1} = R_3(-\phi) R_1(-\theta) R_3(-\psi)$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\underline{\tilde{e}}_3 = (\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{1}) \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (\underline{0} \quad \sin\theta \cdot \underline{1} \quad \cos\theta \cdot \underline{1}) \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (\sin\theta \sin\psi \, \underline{1} , \; \sin\theta \cos\psi \, \underline{1} , \; \cos\theta \, \underline{1}) \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} =$$
$$= \sin\theta \sin\psi \, \underline{e}_1 + \sin\theta \cos\psi \, \underline{e}_2 + \cos\theta \, \underline{e}_3$$

Si ottiene

$$\underline{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \end{pmatrix}$$

Allora

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{\underline{R}}^2 + \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi)^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi)^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta)^2$$

e infine

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

e. Calcolo del momento di inerzia

In un sistema di coordinate in cui $x_G = y_G = 0$

$$I_{2D} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = M \frac{\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)}{\sum_i m_i} =$$

$$= M \frac{\int_A dx\, dy\, \rho(x,y)\,(x^2+y^2)}{\int_A dx\, dy\, \rho(x,y)}$$

$\rho(x,y)$ densità

A area del corpo

Se la densità $\rho(x,y) =$ costante allora

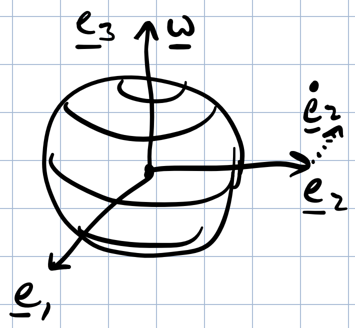
$$I_{2D} = M \frac{\int_A dx\, dy\, (x^2+y^2)}{\int_A dx\, dy}$$

Analogamente in 3D ad esempio

$$I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = M \frac{\int_V dx\, dy\, dz\, \rho(x,y,z)\,(x^2+y^2)}{\int_V dx\, dy\, dz\, \rho(x,y,z)}$$

Applicazione: la trottola

Sfera.



Per simmetria $I_1 = I_2 = I_3 = I$

Dunque $\dot{\omega}_1 = 0 \quad \dot{\omega}_2 = 0 \quad \dot{\omega}_3 = 0$

Nel riferimento solidale ω è costante.

Scegliamo $\omega_1 = \omega_2 = 0 \qquad \omega_3 = \omega$

Allora $L_1 = L_2 = 0 \qquad L_3 = I\omega$

$\dot{\underline{e}}_3 = \underline{\omega} \times \underline{e}_3 = 0$ perché $\underline{\omega} \parallel e_3$

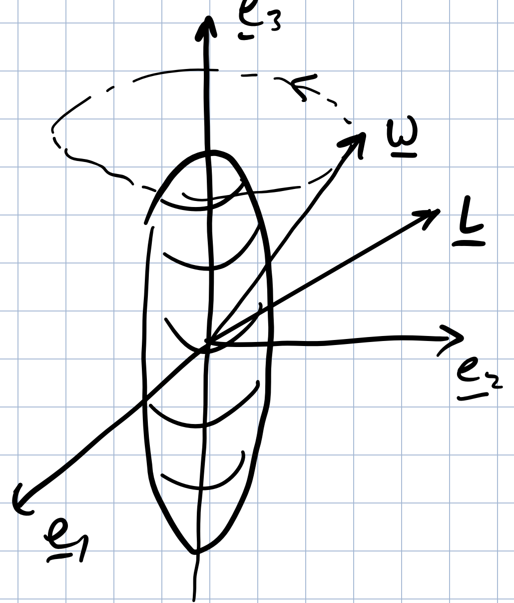
$\dot{\underline{e}}_2 = \underline{\omega} \times \underline{e}_2 = -\omega \underline{e}_1$

$\dot{\underline{e}}_1 = \underline{\omega} \times \underline{e}_1 = \omega \underline{e}_2$

Rotazione costante intorno ad $\underline{\omega}$

Trottola simmetrica libera

$I_1 = I_2 = I \qquad I_3 = I - \Delta I$



$$\begin{cases} I\dot{\omega}_1 = +\omega_2\omega_3\,\Delta I \\ I\dot{\omega}_2 = -\omega_1\omega_3\,\Delta I \\ (I-\Delta I)\,\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_3 = \text{costante}$$

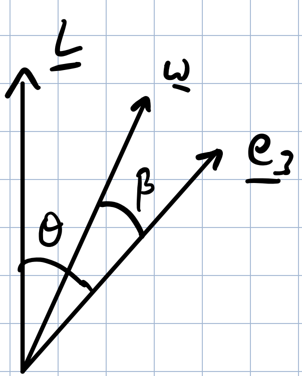
$$\Omega = \frac{\omega_3\,\Delta I}{I} \qquad \begin{cases} \dot{\omega}_1 = \Omega\,\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = -\Omega\,\omega_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 \sin(\Omega t) \\ \omega_0 \cos(\Omega t) \\ \omega_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I\omega_0 \sin(\Omega t) \\ I\omega_0 \cos(\Omega t) \\ (I-\Delta I)\,\omega_3 \end{pmatrix}$$

Dunque $\underline{\omega}$ precede intorno all'asse $\underline{e}_3$

In un riferimento inerziale

- $\underline{L}$ è costante
- $\underline{L} \cdot \underline{e}_3 = L_3$ è costante
  dunque θ è costante
- $\underline{\omega} \cdot \underline{e}_3 = \omega_3$ è costante
  dunque β è costante
- $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{L_1^2+L_2^2}}{L_3} = \dfrac{I\omega_0}{(I-\Delta I)\,\omega_3}$
- $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}{\omega_3} = \dfrac{\omega_0}{\omega_3} < \tan\theta$



$\underline{e}_3$ precede intorno a $\underline{L}$ con velocità angolare Ω

$\underline{\omega}$ rimane tra $\underline{L}$ ed $\underline{e}_3$ perché $\beta < \theta$

La trottola ruota intorno ad $\underline{\omega}$

Nel formalismo lagrangiano

Se $I_1 = I_2 = I$ allora

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I \left[(\dot{\phi} \sin\theta)^2 + \dot{\theta}^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta)^2$$

ϕ e ψ sono coordinate cicliche

$$P_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) = I_3 \omega_3 = \text{cost.}$$

$$P_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = I \dot{\phi} \sin^2\theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \cos\theta$$
$$= I \dot{\phi} \sin^2\theta + I_3 \omega_3 \cos\theta = \text{cost.}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I \ddot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = I \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta - I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \cdot \dot{\phi} \sin\theta$$
$$= \dot{\phi} \sin\theta \left[I \dot{\phi} \cos\theta - I_3 \omega_3 \right]$$

Possiamo scegliere una soluzione:

$\theta = \text{costante}, \ \dot{\theta} = 0, \ \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow I \dot{\phi} \cos\theta = I_3 \omega_3$

allora $\dot{\phi} = \dfrac{I_3 \omega_3}{I \cos\theta} = \text{costante}$

e $\dot{\psi} = \omega_3 - \dot{\phi} \cos\theta = \omega_3 - \dfrac{I_3 \omega_3}{I} = \omega_3 \dfrac{I - I_3}{I} = \omega_3 \dfrac{\Delta I}{I}$

Infine $P_\phi = \dfrac{I_3 \omega_3}{\cos\theta} \sin^2\theta + I_3 \omega_3 \cos\theta = \text{cost.}$ è coerente

È la stessa soluzione di prima.

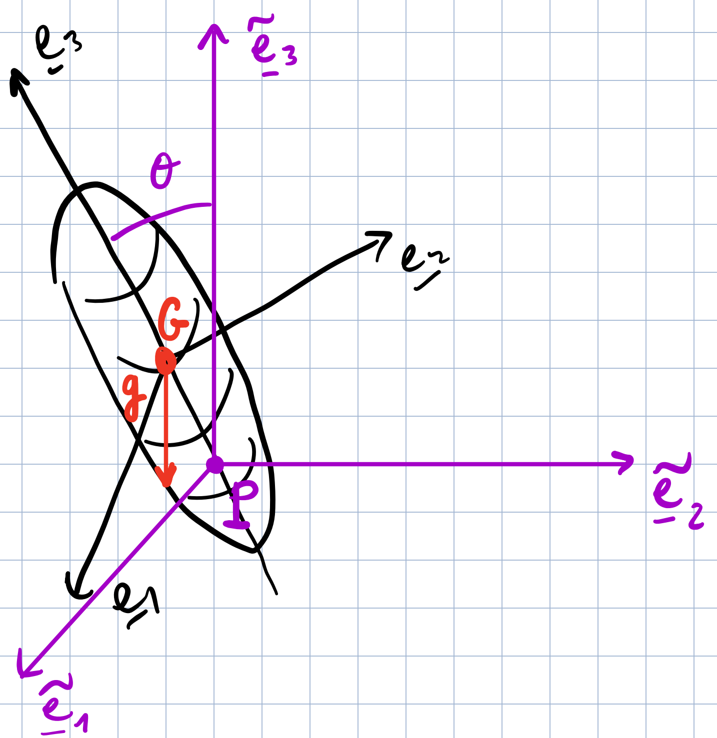
- L'angolo θ tra L ed e_3 è costante
- L'angolo ϕ di rotazione intorno ad $\tilde{e}_3$ ha $\dot{\phi} = \frac{I_3 \omega_3}{I \cos\theta}$
- L'angolo ψ di precessione intorno ad e_3 ha $\dot{\psi} = -\Omega$

Abbiamo

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \cancel{\dot{\theta}}^{=0} \cos\psi \\ \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \cancel{\sin}\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_3 \omega_3}{I} \tan\theta \ \sin(\Omega t) \\ \frac{I_3 \omega_3}{I} \tan\theta \ \cos(\Omega t) \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

dunque $\omega_0 = \frac{I_3 \omega_3}{I} \tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{I \omega_0}{I_3 \omega_3} = \frac{I \omega_0}{(I - \Delta I) \omega_3}$

Trottola simmetrica pesante



Trottola simmetrica vincolata al punto P in presenza di gravità

Come nel caso 2D, la trattazione precedente vale sia riferita al centro di massa che a un punto fisso

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{x}}_i^2 - M g R_z + \text{vincoli} \left\{ \begin{array}{l} |\underline{x}_i - \underline{x}_j| = l_{ij} \\ \underline{x}_P = 0 \end{array} \right\}$$

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{\omega} \times \underline{x}_i$$

Tutto uguale con il tensore $\hat{I}$ calcolato rispetto a P.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 - M g l \cos\theta$$

$$= \frac{1}{2} I \left[(\dot{\phi} \sin\theta)^2 + \dot{\theta}^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta)^2 - M g l \cos\theta$$

ψ, ϕ cicliche, 3 quantità conservate: p_ψ, p_ϕ, E

Il moto si integra per quadrature